Decidibilidade

Prof. Marcus Vinícius Midena Ramos

Universidade Federal do Vale do São Francisco

9 de agosto de 2019

marcus.ramos@univasf.edu.br
www.univasf.edu.br/~marcus.ramos

Bibliografia

Básica:

- *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation (capítulo 9)*
  J. E. Hopcroft, R. Motwani e J. D. Ullman
  Addison-Wesley, 2007, 3ª edição
- *Introdução à Teoria da Computação (capítulos 4 e 5)*
  M. Sipser
  Thomson, 2006, 2ª edição

Complementar:

- *Languages and Machines (capítulo 12)*
  T. A. Sudkamp
  Addison-Wesley, 2006, 3ª edição
- *Teoria da Computação: Máquinas Universais e Computabilidade (capítulo 9)*
  T. A. Diverio e P B Menezes
  Bookman, 2011, 3ª edição

Roteiro

Questões

- Existe um algoritmo que resolve um certo problema?
- Como demonstrar que existe — ou que não existe — tal algoritmo?

Definições

- Decidibilidade é o estudo dos problemas codificados como linguagens;
- Máquinas de Turing são usadas como representação formal da noção de algoritmo;
- A prova da existência (ou não) de um algoritmo que resolve um certo problema é equivalente à demonstração da existência (ou não) de uma Máquina de Turing que resolve o mesmo problema.

Problema de decisão

Conceito

- Um problema é dito um "problema de decisão" quando ele é transformado num problema equivalente, cujas respostas são apenas SIM ou NÃO;
- A coleção das instâncias de um problema de decisão cujas respostas são apenas afirmativas forma a linguagem que representa o referido problema;
- Necessidade de se codificar as instâncias do problema de forma unívoca.

Problema de decisão

Essência

- Determinar se a linguagem que representa um problema de decisão é recursiva.
  - Em caso afirmativo, existe um algoritmo (melhor caso);
  - Em caso negativo, investigar se a linguagem é recursivamente enumerável.
- Determinar se a linguagem que representa um problema de decisão é recursivamente enumerável.
  - Em caso afirmativo, é possível determinar as instâncias afirmativas do problema, mas haverá sempre pelo menos uma entrada (cuja resposta é negativa) que nunca produzirá resposta;
  - Em caso negativo, haverá sempre pelo menos uma entrada (cuja resposta é positiva) que nunca produzirá resposta (pior caso);

Problema de decisão

Exemplo

- Problema P: determinar se um número binário é par.
- Problema de decisão equivalente P': agrupar os números binários que são pares (resposta afirmativa ao problema) e formar uma linguagem L com eles.
- $L = \{0, 10, 100, 110, 1000, 1010, 1100, 1110, ...\}$. Note que os números ímpares $(1, 01, 11$ etc) não pertencem à L;

Problema de decisão

Exemplo

- A resposta ao problema P — determinar se um número binário é par — é transformada na resposta à pergunta: "o número binário fornecido pertence à linguagem L?"
- Genericamente, pretende-se determinar se existe uma Máquina de Turing M que sempre pára e é capaz de decidir se uma cadeia qualquer de zeros e uns pertence à linguagem L;
- Caso exista tal máquina, isso implica a existência de um algoritmo que resolve P e diz-se que M "decide" P'. Caso contrário, não existe tal algoritmo.

Problema de decisão

Exemplos

Suponha que $c(X)$ representa uma codificação de X sobre um certo alfabeto Σ.

- Dadas duas gramáticas livres de contexto G_1 e G_2, é possível determinar se $L(G_1) = L(G_2)$?
  - Codificar G_1 e G_2 de forma adequada;
  - Considerar a linguagem $\{c(G_1)c(G_2)|L(G_1) = L(G_2)\}$
  - Determinar se essa linguagem é recursiva.
- Dadas uma Máquina de Turing M e uma entrada w, é possível determinar se M aceita w?
  - Codificar M e w de forma adequada;
  - Considerar a linguagem $\{c(M)c(w)|M$ aceita $w\}$
  - Determinar se essa linguagem é recursiva.

Linguagens Recursivas e Dedicibilidade

- Um problema de decisão é dito "decidível" se a linguagem que representa as instâncias afirmativas do problema forma uma linguagem recursiva. Caso contrário o problema é dito "não-decidível" (ou "indecidível").
- Como linguagens recursivas são reconhecidas por Máquinas de Turing que sempre param, qualquer que seja a entrada, a existência de um algoritmo que resolve um problema de decisão implica a existência de pelo menos uma Máquina de Turing que sempre pára, qualquer que seja a entrada fornecida (afirmativa ou negativa).

Outras Classes de Linguagens

- Problemas de decisão que formam linguagens recursivamente enumeráveis e não-recursivas são aceitos apenas por Máquinas de Turing que entram em loop para pelo menos uma instância do problema de decisão cuja resposta é negativa;
- Problemas de decisão que formam linguagens não-recursivamente enumeráveis não são aceitos por nenhuma Máquina de Turing que pare sempre que as instâncias são afirmativas (ou seja, toda e qualquer Máquina de Turing construída para este problema entra em loop com pelo menos uma instância do problema cuja resposta é afirmativa).

Definições

Solucionável × Não-solucionável

- Problema solucionável ⇔ Linguagem recursiva
- Problema não-solucionável ⇔ Linguagem não-recursiva

Definições

Parcialmente solucionável × Totalmente insolúvel

- Problema parcialmente solucionável (ou computável) ⇔ Linguagem recursivamente enumerável
- Problema totalmente insolúvel (ou não-computável) ⇔ Linguagem não-recursivamente enumerável

Definições

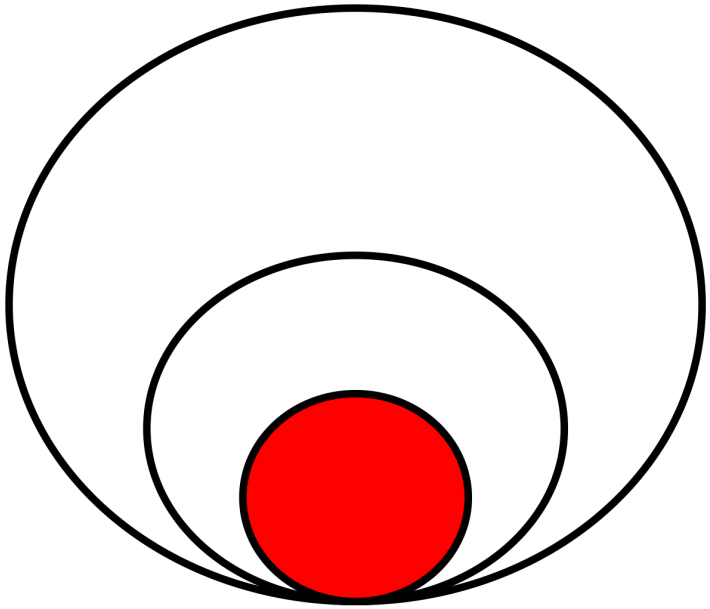
Resumo

- Todo problema é solucionável ou não-solucionável;
- Todo problema solucionável é parcialmente solucionável;
- Todo problema é parcialmente solucionável ou totalmente insolúvel;
- Um problema não-solucionável pode ser parcialmente solucionável ou totalmente insolúvel;
- Um problema parcialmente solucionável pode ser solucionável ou não.

Definições

Problema Solucionável

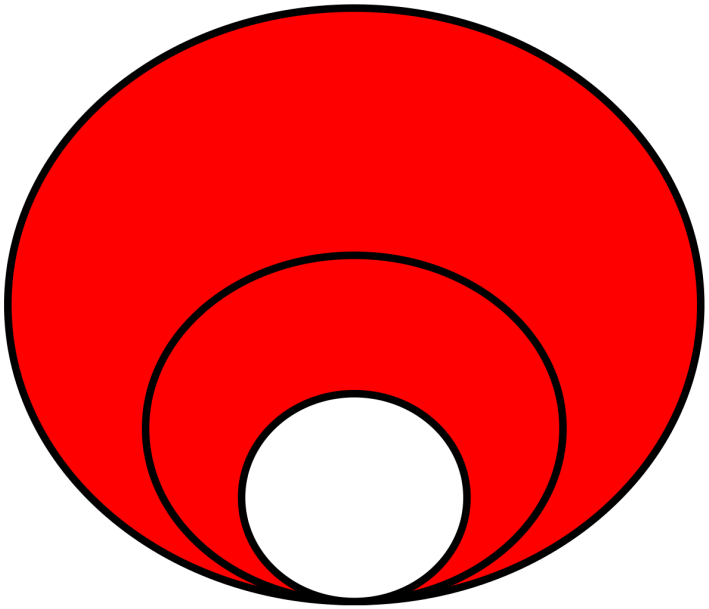
- Problema solucionável $\Leftrightarrow$ Linguagem recursiva;
- Existe pelo menos uma MT que aceita a linguagem e pára com toda entrada.



Definições

Problema Não-Solucionável

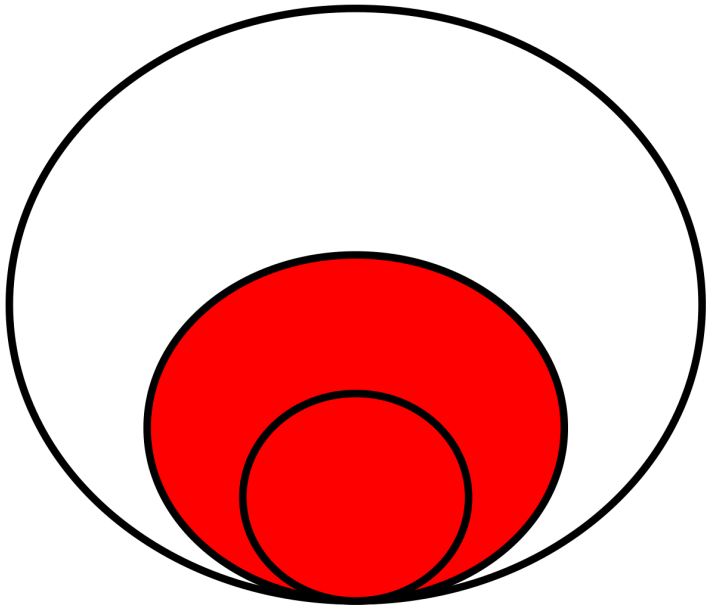
- Problema não-solucionável $\Leftrightarrow$ Linguagem não-recursiva;
- Se existir uma MT que aceite a linguagem, ela necessariamente entra em loop com alguma instância negativa. Mas também pode ser que não exista nenhuma MT que a aceite.



Definições

Problema Parcialmente Solucionável

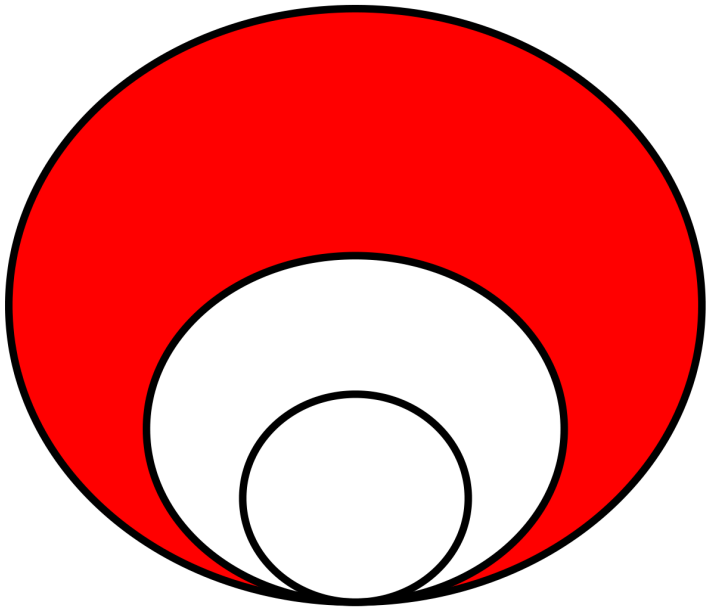
- Problema parcialmente solucionável $\Leftrightarrow$ Linguagem recursivamente enumerável;
- Existe pelo menos uma MT que aceita esta linguagem. Pode ser que ela pare com todas as instâncias negativas, ou não.



Definições

Problema Totalmente Insolúvel

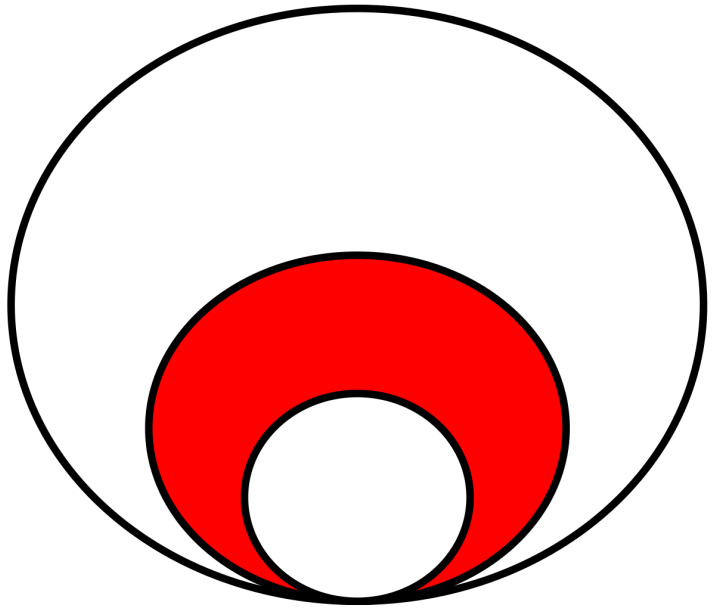
- Problema totalmente insolúvel $\Leftrightarrow$
  Linguagem não-recursivamente enumerável;
- Não existe nenhuma MT que aceite esta linguagem.



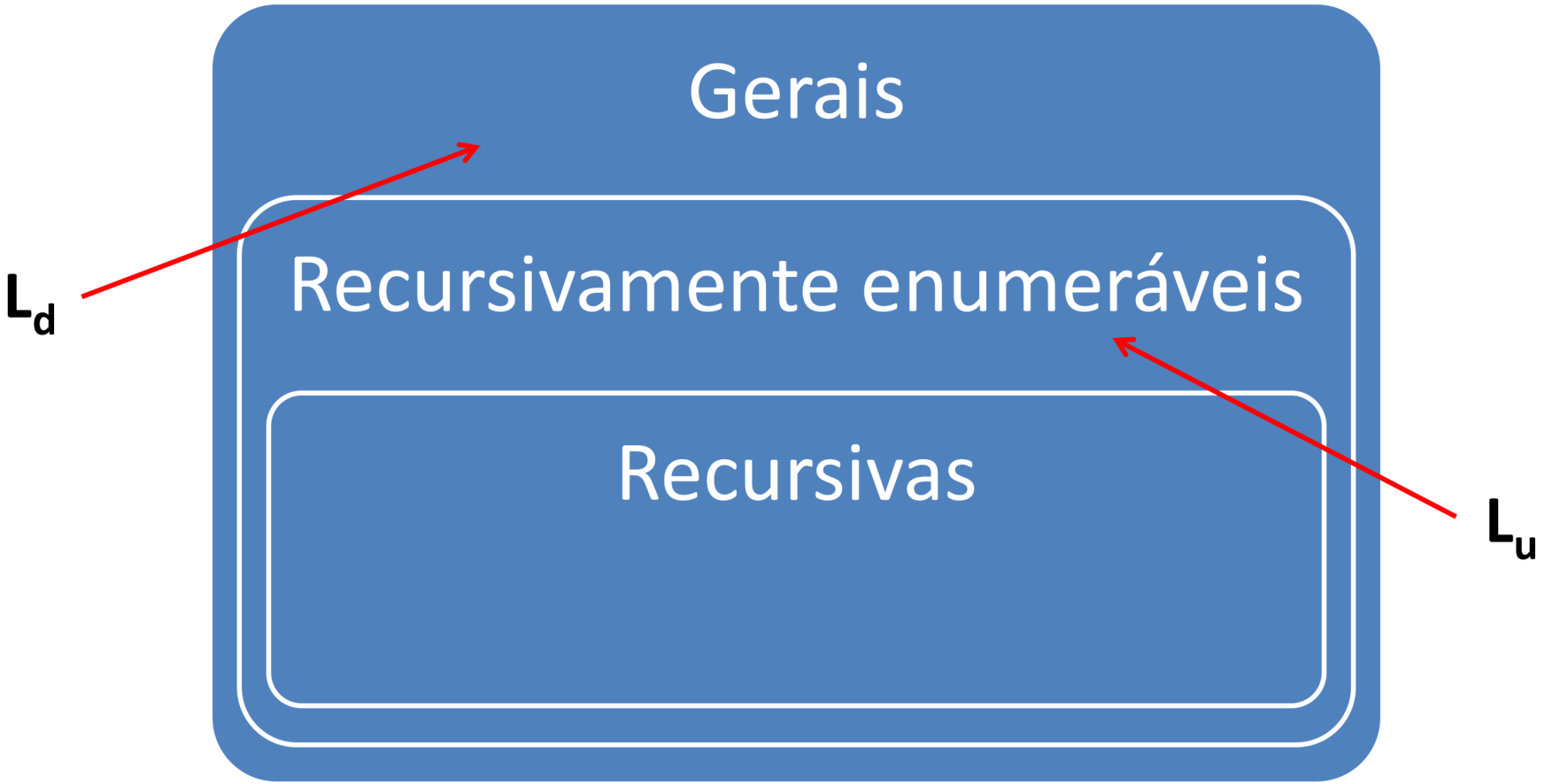
Definições

Problema Não-Solucionável e Parcialmente Solucionável

- Problema não-solucionável e parcialmente solucionável $\Leftrightarrow$ Linguagem recursivamente enumerável e não-recursiva;
- Existe pelo menos uma MT que aceita esta linguagem. Porém, todas elas entram em loop com alguma instância negativa.



Conceitos



Motivação

Por que estudar decidibilidade?

- Ajuda a identificar problemas insolúveis;
- Evita desperdício de tempo e esforço com a tentativa de resolução de problemas insolúveis;
- Aponta para possibilidades de simplificações e/ou alterações do problema original, a fim de que ele se torne solúvel;
- Amplia a sua compreensão sobre a natureza, as possibilidades e os limites da computação.

Seqüência

1. Problemas decidíveis;
2. Problemas indecidíveis;
3. Técnicas para classificar problemas de natureza originalmente desconhecida como sendo decidíveis ou indecidíveis.

Problema A_{AFD}

Aceitação em autômatos finitos determinísticos sem transições em vazio:

$$A_{AFD} = \{\langle B, w\rangle | B \text{ é um AFD que aceita a cadeia } w\}$$

Teorema: A_{AFD} é uma linguagem decidível.
Prova:

1. Construir uma MT M que analisa $\langle B\rangle$;
2. Se $\langle B\rangle$ não representa um AFD válido, M pára e rejeita a entrada;
3. Se $\langle B\rangle$ representa um AFD válido, M simula B com a entrada w;
4. Se B pára numa configuração final, então M pára e aceita;
5. Se B pára numa configuração não-final, então M pára e rejeita.

Problema A_{AFN}

Aceitação em autômatos finitos
não-determinísticos com transições em vazio:

$$A_{AFN} = \{\langle B, w\rangle | B \text{ é um AFN que aceita a cadeia } w\}$$

Teorema: A_{AFN} é uma linguagem decidível.
Prova:

1. Construir uma MT M que analisa $\langle B\rangle$;
2. Se $\langle B\rangle$ não representa um AFN válido, M pára e rejeita a entrada;
3. Se $\langle B\rangle$ representa um AFN válido, M converte o AFN B para um AFD B' equivalente;
4. M simula B' com a entrada w;
5. Se B' pára numa configuração final, então M pára e aceita;
6. Se B' pára numa configuração não-final, então M pára e rejeita.

Problema A_{AFN}

O algoritmo usado para demonstrar a decidibilidade de A_{AFD} não se aplica. A existência de um ciclo formado por transições em vazio no autômato finito pode fazer com que a simulação entre em loop infinito e, portanto, não consiga produzir uma resposta.

Problema A_{EXR}

Geração de cadeia por expressão regular:

$$A_{EXR} = \{\langle R, w\rangle | R \text{ é uma expressão regular que gera a cadeia } w\}$$

Teorema: A_{EXR} é uma linguagem decidível.
Prova:

1. Construir uma MT M que analisa $\langle R\rangle$;
2. Se $\langle R\rangle$ não representa uma expressão regular válida, M pára e rejeita;
3. Se $\langle R\rangle$ representa uma expressão regular válida, M converte R para um AFN B que reconhece a mesma linguagem;
4. M converte o AFN B para um AFD B' equivalente;
5. M simula B' com a entrada w;
6. Se B' pára numa configuração final, então M pára e aceita;
7. Se B' pára numa configuração não-final, então M pára e rejeita.

Problema V_{AFD}

Vacuidade da linguagem reconhecida por autômato finito determinístico:

$$V_{AFD} = \{\langle B \rangle | B \text{ é um AFD e } L(B) = \emptyset\}$$

Teorema: V_{AFD} é uma linguagem decidível.[1]
Prova:

1. Marcar o estado inicial de B;
2. Repetir até que nenhum novo estado venha a ser marcado:
   - Marque todos os estados de destino para os quais existam transições partindo de um estado já marcado;
3. Se nenhum estado final estiver marcado, páre e aceite; caso contrário, páre e rejeite.

[1] V_{AFN}?

Problema EQ_{AFD}

Igualdade das linguagens reconhecidas por dois autômatos finitos determinísticos:

$$EQ_{AFD} = \{\langle A, B\rangle | A, B \text{ são AFDs e } L(A) = L(B)\}$$

Teorema: EQ_{AFD} é uma linguagem decidível.[2]
Prova:

1. Construir o AFD C que reconhece a linguagem:
   $L(A) \cap \overline{L(B)}) \cup (\overline{L(A)} \cap L(B))$
   Notar que $L(A) = L(B) \Leftrightarrow L(C) = \emptyset$;
2. Determinar se $L(C) = \emptyset$;
3. Em caso afirmativo, páre e aceite a entrada;
4. Caso contrário, páre e rejeite a entrada;
5. Pode ser feita também com minimizações.

[2] EQ_{AFN}?

Problema A_{GLC}

Geração de cadeia por gramática livre de contexto:

$$A_{GLC} = \{\langle G, w\rangle | G \text{ é uma GLC que gera } w\}$$

Teorema: A_{GLC} é uma linguagem decidível.
Prova:

1. Construir uma MT que obtém G' na Forma Normal de Chomsky $(A \rightarrow BC|a)$ tal que $L(G) = L(G')$;
2. Considerar $n = |w|$;
3. Se $n > 0$, então fazer todas as derivações com $2 * n - 1$ passos;
4. Se $n = 0$, então fazer todas as derivações com 1 passo;
5. Se alguma dessas derivações gera w, páre e aceite;
6. Caso contrário, páre e rejeite.

Problema A_{GLC}

- A geração de uma cadeia de comprimento n numa GLC na Forma Normal de Chomsky demanda, necessariamente, a aplicação de $n-1$ regras do tipo $A \rightarrow BC$ (para gerar uma forma sentencial com n símbolos não-terminais) e também a aplicação de n regras do tipo $A \rightarrow a$ para transformar a forma sentencial numa sentença.
- Portanto, a geração de uma cadeia de n símbolos requer a aplicaçao de $2 * n - 1$ regras ou passos de derivação;
- Existe um conjunto finito de seqüências de derivação com qualquer quantidade de passos;
- Basta obter todas elas e verificar se alguma produz a cadeia informada na entrada;
- Em caso afirmativo, a cadeia pertence à linguagem;
- Em caso negativo, ela não pertence.

Problema A_{GLC}

Exemplo

Seja:

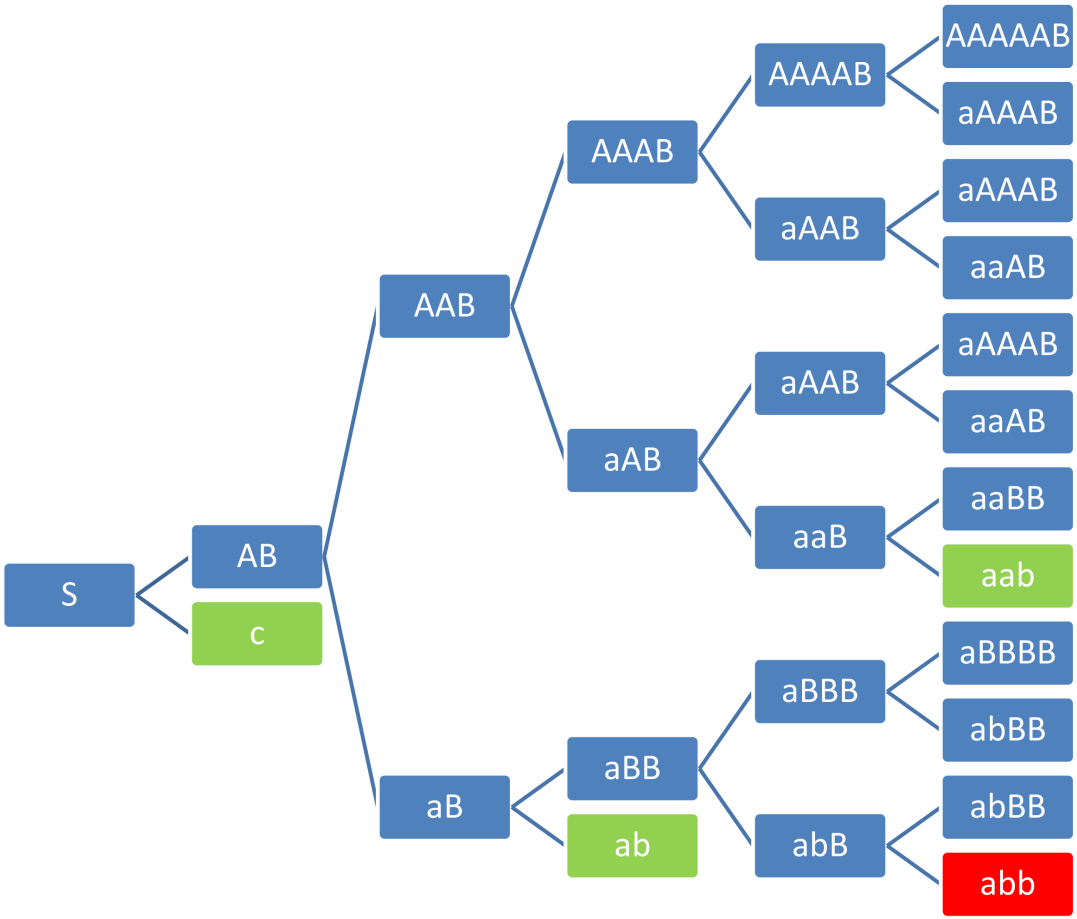
- $S \to AB$
- $S \to c$
- $A \to AA$
- $B \to BB$
- $A \to a$
- $B \to b$

Considere a cadeia abb:

- $|abb| = 3$;
- Deve-se pesquisar todas as seqüências de derivação com até $2 * 3 - 1 = 5$ passos;
- Para simplificar, serão consideradas apenas derivações mais à esquerda.

Problema A_{GLC}

Exemplo



Problema A_{GLC}

Construir uma MT que simula G diretamente pode não funcionar, pois pode haver seqüências infinitas de derivações em G. Por exemplo, se G possuir as regras unitárias $X \to Y$ e $Y \to X$, é possível que a seqüência de derivações torne-se infinita:

$$... \Rightarrow \alpha X \beta \Rightarrow \alpha Y \beta \Rightarrow \alpha X \beta \Rightarrow \alpha Y \beta \Rightarrow ...$$

Problema V_{GLC}

Vacuidade da linguagem gerada por uma gramática livre de contexto:

$$V_{GLC} = \{\langle G \rangle | G \text{ é uma GLC e } L(G) = \emptyset\}$$

Teorema: V_{GLC} é uma linguagem decidível.
Prova:

1. Marcar todos os símbolos terminais de G;
2. Repetir até que nenhum novo símbolo não-terminal venha a ser marcado:
   - Marque todos os símbolos não-terminais X para os quais existam regras $X \rightarrow Y_1 Y_2 ... Y_n$ e cada Y_i já esteja marcado;
3. Se a raiz da gramática não estiver marcada, páre e aceite; caso contrário, páre e rejeite.

Problema V_{GLC}

Testar todas as cadeias $w \in \Sigma^*$ em G (mesmo que convertida para a Forma Normal de Chomsky) diretamente pode não funcionar, pois há uma quantidade infinita de cadeias a serem testadas e $L(G)$ pode ser vazia.

Problema EQ_{GLC}

Igualdade das linguagens geradas por duas gramáticas livres de contexto:

$$EQ_{GLC} = \{\langle G, H\rangle | G, H \text{ são GLCs e } L(G) = L(H)\}$$

Teorema: EQ_{AFD} é uma linguagem indecidível.
Prova:

- Será vista mais adiante;
- A classe das linguagens livres de contexto não é fechada em relação às operações de complementação e intersecção (logo, a estratégia usada na prova de EQ_{AFD} não pode ser usada aqui).

Problema LLC

Determinar se uma cadeia pertence à uma determinada linguagem livre de contexto L (análise sintática):

$$LLC = \{\langle w \rangle | w \in L(G)\}$$

Teorema: LLC é uma linguagem decidível.
Prova:

- Seja G uma GLC tal que $L = L(G)$;
- Determinar se $\langle G, w \rangle$ é aceita pela MT que decide A_{GLC};
- Em caso afirmativo, páre e aceite;
- Caso contrário, páre e rejeite.

Problema LLC

Construir uma MT que simula diretamente um autômato de pilha P que reconhece L pode não funcionar, pois podem haver seqüências de movimentações infinitas em P.

Ordenação de cadeias binárias

Seja $\Sigma = \{0, 1\}$. Então o conjunto Σ^* é enumerável.

- Basta considerar as cadeias $w \in \Sigma^*$ em ordem crescente de comprimento;
- Para cada comprimento, considerar as cadeias ordenadas lexicograficamente;
- $\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, ...$
- A i-ésima cadeia será denotada w_i;
- $w_1 = \epsilon, w_2 = 0, w_3 = 1, w_4 = 00, w_5 = 01, w_6 = 10, w_7 = 11, ...$

Codificação de Máquinas de Turing

Convenções

Seja M com alfabeto de entrada $\Sigma = \{0, 1\}$. Uma codificação de M sobre o próprio alfabeto Σ é a seguinte:

- $Q = \{q_1, q_2, ..., q_r\}$;
- Suponha que o estado inicial é q_1;
- Suponha critério de aceitação "Entrada" (a máquina pára quando entra num estado final);
- Suponha que há um único estado final, e ele é q_2;
- $\Gamma = \{X_1, X_2, ..., X_s\}$;
- Suponha $X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = B$. Os demais símbolos são auxiliares;
- Suponha que D_1 representa movimento para a esquerda, D_2 para a direita.

Codificação de Máquinas de Turing

Convenções

Considere $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_l, D_m)$. Uma codificação para essa transição é:

$$0^i 1 0^j 1 0^k 1 0^l 1 0^m$$

onde:

- 0^i representa o estado q_i;
- 0^j representa o símbolo X_j;
- 0^k representa o estado q_k;
- 0^l representa o símbolo X_l;
- 0^m representa o movimento D_m.

Como i, j, k, l, m são maiores que zero, a cadeia 11 não é subcadeia de $0^i 1 0^j 1 0^k 1 0^l 1 0^m$. 11 será usada para separar transições.

Codificação de Máquinas de Turing

Convenções

Considere $|\delta| = n$. Uma codificação para δ (e consequentemente para a Máquina de Turing M) é:

$$C_1 11 C_2 11 ... C_{n-1} 11 C_n$$

onde C_i representa a codificação da transição i.
Como cada C_i começa e termina com pelo menos um símbolo 0, a cadeia 111 não é subcadeia de $C_1 11 C_2 11 ... C_{n-1} 11 C_n$. 111 será usada para separar a MT de outros elementos, se for o caso.

Codificação de Máquinas de Turing

Exemplo

Seja:

$$M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, \delta, q_1, B, \{q_2\})$$

com:

$$\begin{array}{ll} \delta(q_1, 1) = (q_3, 0, R) & \underbrace{0}_{q_1} 1 \underbrace{00}_{1} 1 \underbrace{000}_{q_3} 1 \underbrace{0}_{0} 1 \underbrace{00}_{R} \\ \delta(q_3, 0) = (q_1, 1, R) & 0001010100100 \\ \delta(q_3, 1) = (q_2, 0, R) & 0001001001010 0 \\ \delta(q_3, B) = (q_3, 1, L) & 0001000100010010 \end{array}$$

Portanto, a cadeia que representa M é:

$$\underbrace{0100100010100}_{\delta(q_1,1)=(q_3,0,R)} 11 \underbrace{0001010100100}_{\delta(q_3,0)=(q_1,1,R)} 11 \underbrace{0001001001010 0}_{\delta(q_3,1)=(q_2,0,R)} 11 \underbrace{0001000100010010}_{\delta(q_3,B)=(q_3,1,L)}$$

Cadeias binárias e Máquinas de Turing

Com a ressalva abaixo, é possível considerar a i-ésima cadeia binária w_i como sendo a representação de uma Máquina de Turing, denotada M_i.

- Se w_i não respeita as regras de formação enunciadas anteriormente, então considerar M_i como a Máquina de Turing formada por um único estado (não-final), sem transições, e que pára para qualquer entrada; portanto, $L(M_i) = \{\}$;
- Caso contrário, w_i denota a Máquina de Turing M_i codificada conforme as regras expostas.

Método diagonal de Cantor

- Publicado em 1891;
- Mostra como obter um conjunto diferente de todos os conjuntos de uma dada coleção de conjuntos, seja ela finita ou infinita;
- Cada um dos conjuntos dessa coleção, por sua vez, pode conter um número finito ou infinito de elementos;
- O número de elementos usados para caracterizar tais conjuntos também pode ser finito ou infinito;
- Bastante usado até os dias de hoje.

Método diagonal de Cantor

Características:

- Matriz com linhas e colunas;
- Cada coluna representa um certo elemento (podem existir infinitas colunas);
- Cada linha representa um conjunto criado com esses elementos (se a quantidade de colunas for infinita, podem existir infinitos conjuntos);
- O cruzamento de uma linha com uma coluna é marcado para indicar se aquele elemento pertence (1) ou não pertence (0) ao respectivo conjunto;
- Considere a diagonal e troque 0s por 1s e vice-versa;
- O conjunto assim obtido é diferente de todos os conjuntos representados na matriz.

Método diagonal de Cantor

Exemplo

- Suponha que os elementos são números naturais;
- Cada coluna representa um número natural;
- Cada linha representa um subconjunto dos números naturais.
- Quaisquer que sejam os conjuntos considerados nas linhas, a complementação da diagonal principal produz um novo subconjunto desses mesmos elementos que difere de todos os considerados nas linhas da matriz.

Método diagonal de Cantor

Exemplo

	0	*1*	*2*	*3*	*4*	...
S_1	1	1	1	0	1	...
S_2	1	1	0	0	1	...
S_3	1	0	0	1	0	...
S_4	0	1	1	1	0	...
S_5	0	0	1	0	0	...
...	...	...	...	...		...

Método diagonal de Cantor

Exemplo

Na figura anterior, temos:

- $S_1 = \{0, 1, 2, 4, ...\}$;
- $S_2 = \{0, 1, 4, ...\}$;
- $S_3 = \{0, 3, ...\}$;
- $S_4 = \{1, 2, 3, ...\}$;
- $S_5 = \{2, ...\}$;
- Diagonal: $11010...$;
- Diagonal complementada: $00101...$;
- Conjunto obtido: $X = \{2, 4, ...\}$;
- $X \neq S_i, i \geq 0$.

Método diagonal de Cantor

Aplicações

Serve, por exemplo, para demonstrar que $|\mathbb{N}| < |2^{\mathbb{N}}|$:

- Suponha que $|\mathbb{N}| = |2^{\mathbb{N}}|$;
- Então, existe uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $2^{\mathbb{N}}$;
- As colunas representam os números naturais;
- Cada linha representa um subconjunto dos números naturais dessa bijeção; suponha que eles sejam rotulados por números naturais, a partir de zero;
- Sempre é possível obter um novo subconjunto que não foi considerado pela bijeção;
- A hipótese é falsa e não existe tal bijeção;
- $|\mathbb{N}| < |2^{\mathbb{N}}|$.

Método diagonal de Cantor

Aplicações

Bijeção hipotética representada pela matriz:

	0	*1*	*2*	*3*	*4*	...
0	p_{00}	p_{01}	p_{02}	p_{03}	p_{04}	...
1	p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	...
2	p_{20}	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}	...
3	p_{30}	p_{31}	p_{32}	p_{33}	p_{34}	...
4	p_{40}	p_{41}	p_{42}	p_{43}	p_{44}	...
...	...	...	...	...		...

Basta considerar o subconjunto $\{i \in \mathbb{N} \,|\, p_{ii} = 0, \forall\, i \geq 0\}$.

Linguagem L_d

$$L_d = \{w_i \in \{0,1\}^* \mid w_i \notin L(M_i)\}$$

- Contém as cadeias que, quando consideradas como codificações de Máquinas de Turing, são tais que elas não são aceitas pelas respectivas Máquinas de Turing que elas representam;
- Linguagem da "diagonalização".

Diagonalização e a linguagem L_d

Para cada par linha/coluna (i, j), a tabela indica se M_i aceita w_j:

	w_1	w_2	w_3	w_4	...
$<M_1>=w_1$	0	1	1	0	...
$<M_2>=w_2$	1	1	0	0	...
$<M_3>=w_3$	0	0	1	1	...
$<M_4>=w_4$	0	1	0	1	...
...	...	...	...	...	...

1 indica aceitação, 0 indica rejeição ou loop (os valores apresentados são hipotéticos).

Diagonalização e a linguagem L_d

- Vetor característico: $0, 1, 1, 1, ...$;
- Complemento do vetor característico: $1, 0, 0, 0, ...$;
- $w_1 \in L_d$, $w_2 \notin L_d$, $w_3 \notin L_d$, $w_4 \notin L_d$ etc;
- Portanto, $L_d = \{w_1, ...\}$;
- $L_d = \{w_i \,|\, w_i \notin L(M_i)\}$;

Diagonalização e a linguagem L_d

- L_d não é aceita por nenhuma Máquina de Turing, pois o vetor característico dela difere em pelo menos uma posição do vetor característico de todas as linguagens aceitas por todas as Máquinas de Turing que existem;
- Em outras palavras, existe pelo menos uma cadeia que difere L_d de $L(M_i), \forall i \geq 1$;
- L_d não é uma linguagem recursivamente enumerável;
- Não existe nenhuma Máquina de Turing que aceite L_d.

Teorema 1

L_d não é recursivamente enumerável

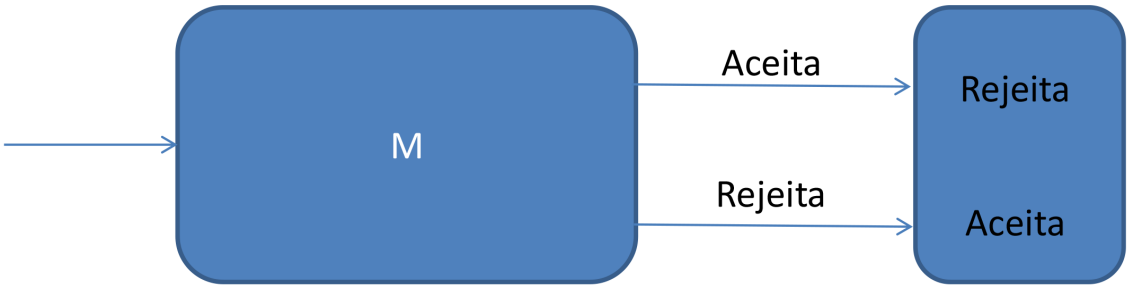
Teorema:
A linguagem L_d não é recursivamente enumerável.
Prova:

- Suponha que L_d seja recursivamente enumerável. Então deve existir uma Máquina de Turing M que aceita L_d. Logo, $M = M_i$ para algum valor de i. Considere, portanto, que M_i aceita L_d e considere a cadeia w_i:
  - Se $w_i \in L_d$, então M_i aceita w_i. Mas, por definição, se M_i aceita w_i então w_i não pode pertencer à L_d;
  - Se $w_i \notin L_d$, então M_i não aceita w_i. Mas, por definição, se M_i não aceita w_i então w_i deve pertencer à L_d.
- Qualquer que seja o caso, há uma contradição;
- Logo, a hipótese é falsa e não existe M_i que aceite L_d.

Teorema 2

Se L é recursiva, então $\overline{L}$ também é recursiva

Ideia geral:



Teorema 2

Se L é recursiva, então $\overline{L}$ também é recursiva

Teorema:
Se L é recursiva, então $\overline{L}$ também é recursiva.
Prova:
Seja $L = L(M)$, onde M é uma Máquina de Turing que sempre pára. O seguinte método mostra como obter M' a partir de M de tal forma que $L(M') = \overline{L(M)}$. Inicialmente, $M' = M$.

1. Os estados finais de M tornam-se não-finais em M';
2. As transições que partiam dos estados finais de M (agora não finais em M') são removidas em M' (critério 'entrada" apenas);
3. M' tem um novo e único estado final, não existente em M, denotado r;
4. Para cada combinação de estado não-final de M e símbolo de entrada não aceito nesse estado, adicionar, em M', uma transição do mesmo estado com esse símbolo para r.

Teorema 2

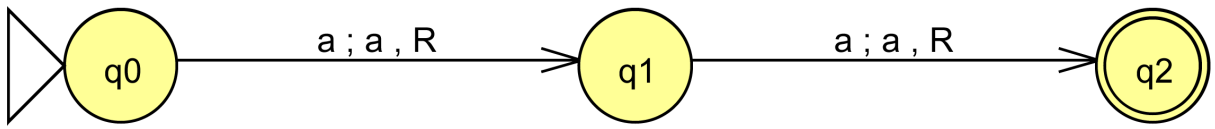
Se L é recursiva, então $\overline{L}$ também é recursiva

- (1) e (2) garantem que todas as cadeias aceitas por M são rejeitadas por M';
- (3) e (4) garantem que todas as cadeias rejeitadas por M são aceitas por M';
- Como M sempre pára, então M' sempre pára também;
- Portanto, M' aceita $\overline{L}$ e $\overline{L}$ é recursiva.

Teorema 2

Exemplo

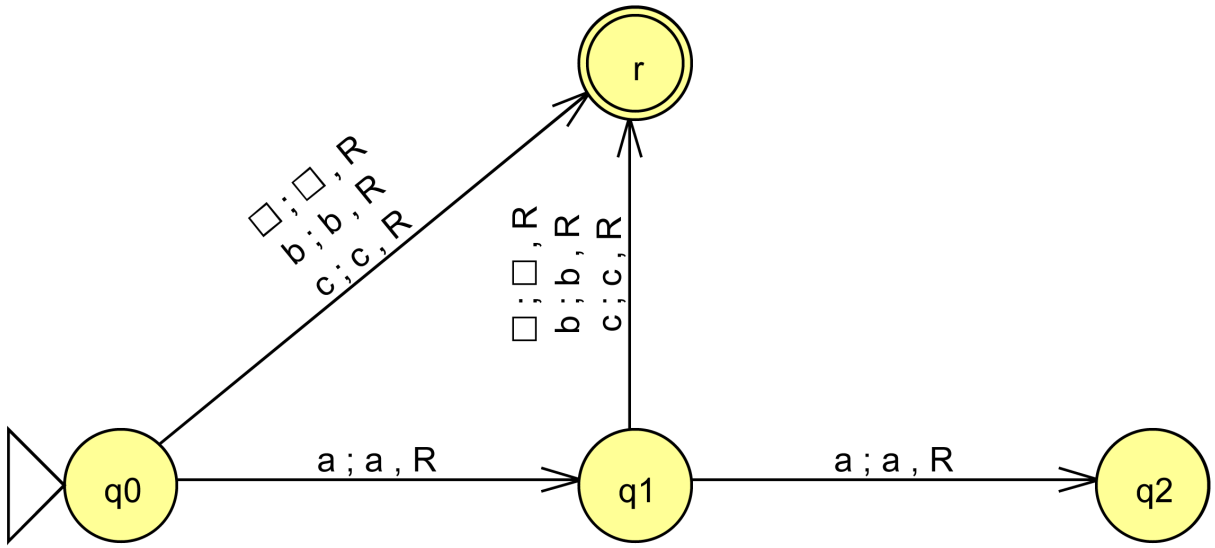
A Máquina de Turing M abaixo aceita a linguagem $aa(a|b|c)^*$ (cadeias que possuem aa como prefixo):



Teorema 2

Exemplo

A Máquina de Turing M' abaixo aceita a linguagem $(a|b|c)^* - aa(a|b|c)^*$ (cadeias que não possuem aa como prefixo):



Teorema 3

L e $\overline{L}$ são recursivamente enumeráveis se e somente se L é recursiva

Teorema:
L e $\overline{L}$ são recursivamente enumeráveis se e somente se L é recursiva.
Prova:
($\Leftarrow$) Se L é recursiva, então, pelo Teorema 1, $\overline{L}$ também é recursiva. Como, pela definição, toda linguagem recursiva é também recursivamente enumerável, isso prova que L e $\overline{L}$ são recursivamente enumeráveis.
($\Rightarrow$) Sejam M_1 e M_2 as Máquinas de Turing que aceitam, respectivamente, L e $\overline{L}$. Os métodos apresentados a seguir mostram como obter M a partir de M_1 e M_2 de tal forma que $L(M) = L$ e M sempre pára. Ou seja, eles provam que L é recursiva.

Teorema 3

Método

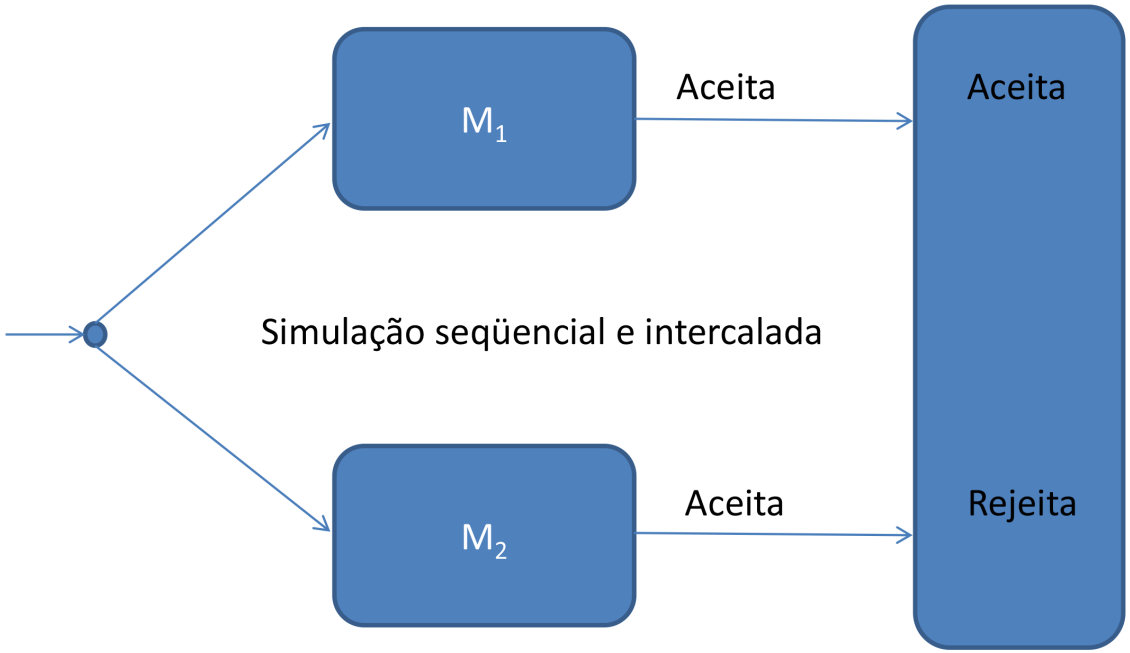
Idéia geral: Simular M_1 e M_2 de forma intercalada, até que uma das duas pare e aceite a entrada:

1. Executar, alternadamente, movimentos em M_1 e M_2;
2. Como toda cadeia w pertence à $L(M_1)$ ou $L(M_2)$, é fato que M_1 ou M_2 aceita w;
3. Se M_1 aceita, então M pára e aceita;
4. Se M_2 aceita, então M pára e rejeita;
5. Assim, $L(M) = L$, M sempre pára, e portanto L é recursiva.

Teorema 3

Método

Idéia geral:



Teorema 3

Método

Descrição: Construir M com duas fitas para simular, de forma intercalada, a operação de M_1 na primeira fita e de M_2 na segunda fita:

1. Ambas as fitas são inicializadas com a cadeia de entrada w a ser analisada;
2. Os estados de M são construídos para representar pares de estados de M_1 e M_2, e também a máquina (1 ou 2) que irá se movimentar em seguida;
3. Em cada estado de M, são considerados alternadamente os símbolos presentes na primeira e na segunda fita;
4. Todos os estados de M que representam algum estado final de M_1 são finais; os demais estados de M são todos não-finais;
5. Se M_1 (M_2) parar sem aceitar, continuar com M_2 (M_1).

Teorema 3

Método

Detalhamento:

1. M copia a entrada w da fita 1 para a fita 2;
2. M seleciona M_1;
3. M tentar executar um movimento de M_1;
4. Se M_1 não tem movimento possível, M seleciona M_2 e vá para 6;
5. Senão, M simula o movimento de M_1 na fita 1 e seleciona M_2;
6. M tentar executar um movimento de M_2;
7. Se M_2 não tem movimento possível, vá para 2;
8. Senão, M simula o movimento de M_2 na fita 2 e vá para 2.

Teorema 3

Método

Algoritmo:

Entrada:

- MT $M_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, q_{01}, B, F_1)$ determinística que aceita L e tem "entrada" como critério de aceitação;
- MT $M_2 = (Q_2, \Sigma, \Gamma_2, \delta_2, q_{02}, B, F_2)$ determinística que aceita $\overline{L}$ e tem "entrada" como critério de aceitação;

Saída:

- MT $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ que aceita L e sempre pára;
- M possui duas fitas, é determinística e tem "entrada" como critério de aceitação.

Teorema 3

Método

Método:

- $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$
- $Q = Q_1 \times Q_2 \times \{1, 2\}$
- $q_0 = (q_{01}, q_{02}, 1)$
- $F = \{(q_1, q_2, f) \in Q_1 \times Q_2 \times \{1, 2\} \,|\, q_1 \in F_1\}$
- $G = \{(q_1, q_2, f) \in Q_1 \times Q_2 \times \{1, 2\} \,|\, q_2 \in F_2\}$

Teorema 3

Método

- $\forall q \in (Q - (F \cup G)), \forall x \in \Gamma$, suponha $q = (q_1, q_2, f)$ e faça:
- Se $f = 1$ então:
  1. $\forall \delta_1(q_1, x) = (q_3, y, D)$, faça:
     $\delta((q_1, q_2, 1), x, \epsilon) = ((q_3, q_2, 2), (y, D), (\epsilon, S))$
  2. $\forall \delta_1(q_1, x)$ não definida, faça:
     $\delta((q_1, q_2, 1), x, \epsilon) = ((q_1, q_2, 2), (x, S), (\epsilon, S))$
- Se $f = 2$ então:
  1. $\forall \delta_2(q_2, x) = (q_3, y, D)$, faça:
     $\delta((q_1, q_2, 2), \epsilon, x) = ((q_1, q_3, 1), (\epsilon, S)(y, D))$
  2. $\forall \delta_2(q_2, x)$ não definida, faça:
     $\delta((q_1, q_2, 2), \epsilon, x) = ((q_1, q_2, 1), (\epsilon, S)(x, S))$

Teorema 3

Método

Observações importantes:

- Se M_1 entra num estado final, então M também entra num estado final. Logo, se M_1 aceita então M tambem aceita;
- Se M_2 entra num estado final, então M pára e rejeita; isto é garantido pela ausência de transições nos estados do conjunto G;
- Se M_2 pára e rejeita, não é necessário continuar com a simulação de M_1. Neste caso, M pode parar e aceitar imediatamente, uma vez que a cadeia de entrada não pertence à $\overline{L}$ e por hipótese pertence à L;
- Da mesma forma, se M_1 pára e rejeita, não é necessário continuar com a simulação de M_2. Neste caso, M pode parar e rejeitar imediatamente, uma vez que a cadeia de entrada não pertence à L e por hipótese pertence à $\overline{L}$.

Teorema 3

Conclusões

- Toda cadeia w está em L ou $\overline{L}$;
- Portanto, pelo menos uma das duas máquinas M_1 e M_2 sempre pára com w (M_1 aceitando ou M_2 aceitando);
- Como M pára sempre quando M_1 ou M_2 aceitam, então M sempre pára;
- M aceita todas as cadeias de L;
- M rejeita todas as cadeias de $\overline{L}$.
- L é recursiva.

Teorema 3

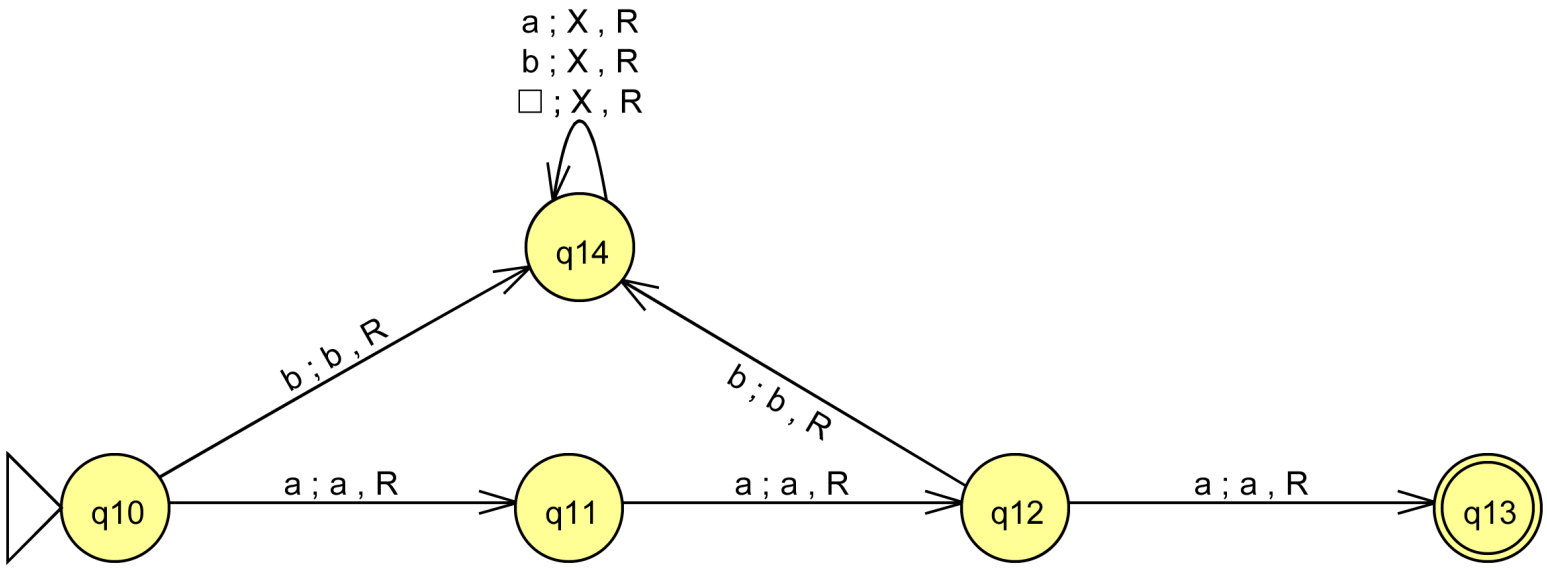
Exemplo

Suponha M_1 tal que:

- M_1 é determinística;
- $L_1(M_1) = ACEITA(M_1) = aaa(a|b)^*$
- $REJEITA(M_1) = a|aa|ab(a|b)^*$
- $LOOP(M_1) = (aab|b)(a|b)^*$
- $ACEITA(M_1) \cup REJEITA(M_1) \cup LOOP(M_1) = \{a, b\}^*$
- $ACEITA(M_1) \cap REJEITA(M_1) \cap LOOP(M_1) = \emptyset$

Teorema 3

Exemplo



Teorema 3

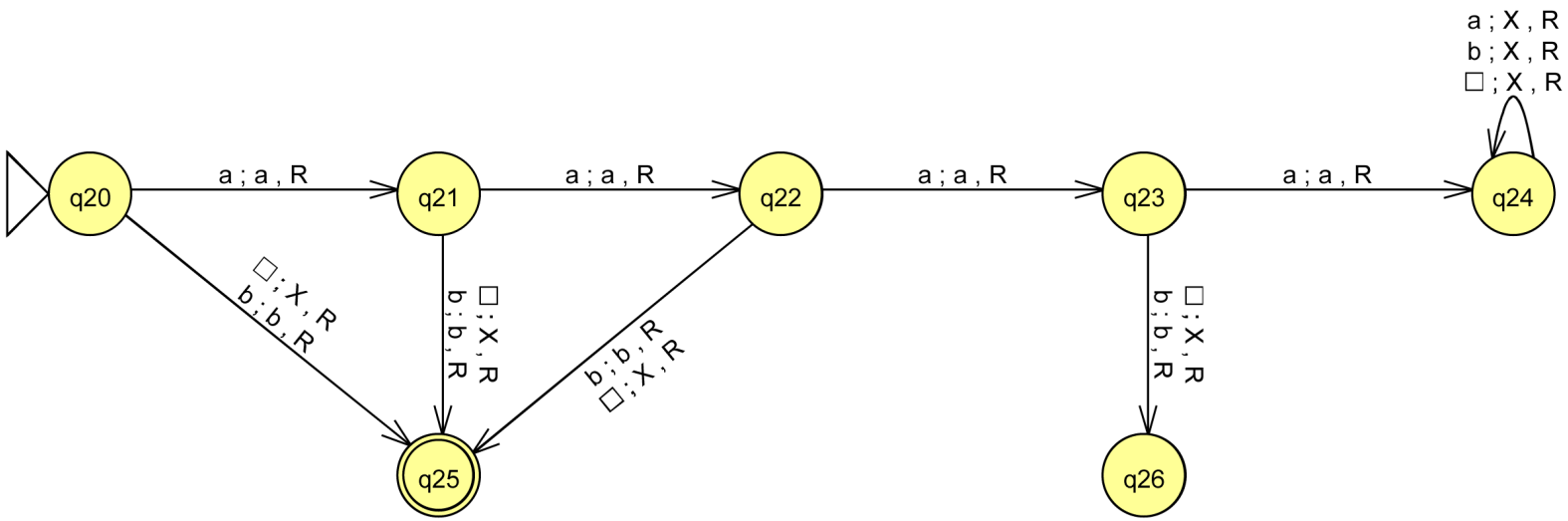
Exemplo

Suponha M_2 tal que:

- M_2 é determinística;
- $L_2(M_2) = \overline{L(M_1)} = ACEITA(M_2) = \epsilon|a|aa|(b|ab|aab)(a|b)^*$
- $REJEITA(M_2) = aaa|aaab(a|b)^*$
- $LOOP(M_2) = aaaa(a|b)^*$
- $ACEITA(M_2) \cup REJEITA(M_2) \cup LOOP(M_2) = \{a, b\}^*$
- $ACEITA(M_2) \cap REJEITA(M_2) \cap LOOP(M_2) = \emptyset$

Teorema 3

Exemplo



Teorema 3

Exemplo

		M_2		
		A	R	L
M_1	A	×	aaab aaa	aaaa
	R	abaa aa	×	×
	L	aabb	×	×

Teorema 3

Exemplo

aaab		aaa	
M_1	M_2	M_1	M_2
A	R	A	R
$(\varepsilon,q_{10},aaab)$	$(\varepsilon,q_{20},aaab)$	(ε,q_{10},aaa)	(ε,q_{20},aaa)
(a,q_{11},aab)	(a,q_{21},aab)	(a,q_{11},aa)	(a,q_{21},aa)
(aa,q_{12},ab)	(aa,q_{22},ab)	(aa,q_{12},aba)	(aa,q_{22},a)
(aaa,q_{13},b)	(aaa,q_{23},b)	(aaa,q_{13},ε)	(aaa,q_{23},ε)
✓	$(aaab,q_{26},\varepsilon)$	✓	×
	×		

Teorema 3

Exemplo

abaa		aa	
M_1	M_2	M_1	M_2
R	A	R	A
$(\varepsilon,q_{10},abaa)$	$(\varepsilon,q_{20},abaa)$	(ε,q_{10},aa)	(ε,q_{20},aa)
(a,q_{11},baa)	(a,q_{22},baa)	(a,q_{11},a)	(a,q_{21},a)
$\times$	(ab,q_{23},aa)	(aa,q_{12},ε)	(aa,q_{22},ε)
	✓	$\times$	(aaX,q_{25},ε)
			✓

Teorema 3

Exemplo

aaaa		aabb	
M_1	M_2	M_1	M_2
A	L	L	A
$(\varepsilon,q_{10},aaaa)$	$(\varepsilon,q_{20},aaaa)$	$(\varepsilon,q_{10},aabb)$	$(\varepsilon,q_{20},aabb)$
(a,q_{11},aaa)	(a,q_{21},aaa)	(a,q_{11},abb)	(a,q_{21},abb)
(aa,q_{12},aa)	(aa,q_{22},aa)	(aa,q_{12},bb)	(aa,q_{22},bb)
(aaa,q_{13},a)	(aaa,q_{23},a)	(aab,q_{14},b)	(aab,q_{25},b)
✓	$(aaaa,q_{24},\varepsilon)$	$(aabX,q_{14},\varepsilon)$	✓
	$(aaaaX,q_{24},\varepsilon)$	$(aabXX,q_{14},\varepsilon)$	
	$(aaaaXX,q_{24},\varepsilon)$	$(aabXXX,q_{14},\varepsilon)$	
	...	...	

Teorema 3

Exemplo

Composição de M_1 e M_2:

- $Q_1 = \{q_{10}, q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{14}\}$;
- $Q_2 = \{q_{20}, q_{21}, q_{22}, q_{23}, q_{24}, q_{25}, q_{26}\}$;
- $|Q| = 5 * 7 * 2 = 70$;
- $|F| = 1(q_{13}) * 7 * 2 = 14$;
- $|G| = 5 * 1(q_{25}) * 2 = 10$;
- Estado inicial $q_0 = (q_{10}, q_{20}, 1)$;
- Próximo passo: definir as transições de $70 - 14 - 10 = 46$ estados.

Teorema 3

Exemplo

Composição de M_1 e M_2:

- Estado inicial $q_0 = (q_{10}, q_{20}, 1)$;
- Como $f = 1$ então:
  - $\delta((q_{10}, q_{20}, 1), a, \epsilon) = ((q_{11}, q_{20}, 2), (a, R), (\epsilon, S))$ pois $\delta_1(q_{10}, a) = (q_{11}, a, R)$;
  - $\delta((q_{10}, q_{20}, 1), b, \epsilon) = ((q_{14}, q_{20}, 2), (b, R), (\epsilon, S))$ pois $\delta_1(q_{10}, b) = (q_{14}, b, R)$;
  - $\delta((q_{10}, q_{20}, 1), \square, \epsilon) = ((q_{10}, q_{20}, 2), (\square, S), (\epsilon, S))$ pois $\delta_1(q_{10}, \square)$ não é definida;
  - $\delta((q_{10}, q_{20}, 1), X, \epsilon) = ((q_{10}, q_{20}, 2), (X, S), (\epsilon, S))$ pois $\delta_1(q_{10}, X)$ não é definida.

Teorema 3

Exemplo

Composição de M_1 e M_2:

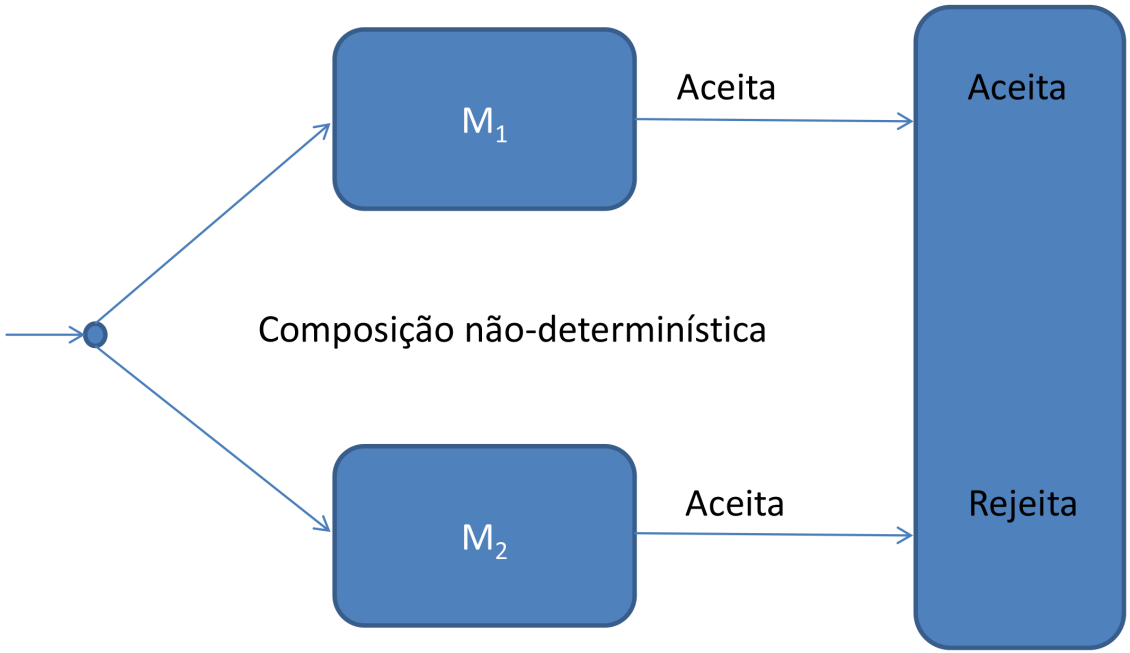
- Estado $(q_{11}, q_{20}, 2)$;
- Como $f = 2$ então:
  - $\delta((q_{11}, q_{20}, 2), \epsilon, a) = ((q_{11}, q_{21}, 1), (\epsilon, S), (a, R))$
    pois $\delta_2(q_{20}, a) = (q_{21}, a, R)$;
  - $\delta((q_{11}, q_{20}, 2), \epsilon, b) = ((q_{11}, q_{25}, 1), (\epsilon, S), (b, R))$
    pois $\delta_2(q_{20}, b) = (q_{25}, b, R)$;
  - $\delta((q_{11}, q_{20}, 2), \epsilon, \square) = ((q_{11}, q_{25}, 1), (\epsilon, S), (X, R))$
    pois $\delta_2(q_{20}, \square) = (q_{25}, X, R)$;
  - $\delta((q_{11}, q_{20}, 2), \epsilon, X) = ((q_{11}, q_{20}, 1), (\epsilon, S), (X, S))$
    pois $\delta_2(q_{20}, X)$ não é definida.

As transições dos demais estados são obtidas de forma similar.

Teorema 3

Método 2

Construir M com uma única fita, a partir da composição não-determinística de M_1 e de M_2:



Teorema 3

Método 2

Interpretação:

- Transformar simplesmente as configurações finais de M_1 em configurações finais de M, e as configurações finais de M_2 em configurações não-finais de M não resolve;
- Motivo: não garante que M pára para toda cadeia de entrada.

Teorema 3

Método 2

Suponha $w \notin L$ tal que $w \in LOOP(M_1)$ e $w \in ACEITA(M_2)$. Nesse caso, w possui duas seqüências distintas de movimentação em M:

- Na primeira, w faz M entrar em loop infinito;
- Na segunda, w é rejeitada por M (pois ela é aceita por M_2);
- Logo, $w \in LOOP(M)$ e M não pára com qualquer entrada;
- M não constitui prova de que L seja recursiva;
- Método 2 não funciona!
- Para ilustrar, considere a cadeia aab no exemplo anterior.

Teorema 3

Método 2

Interpretação:

- Este método funciona, no entanto, se M conseguir:
  - Parar e aceitar a sua entrada sempre que M_1 pára e aceita a entrada;
  - Parar e rejeitar a sua entrada sempre que M_2 pára e aceita a entrada.
- Mas como fazer isso, já que M_1 pode entrar em loop infinito? Neste caso, temos um caminho de loop (em M_1) e, além disso, uma configuração final em M_2 e portanto uma configuração não-final em M. Logo, $w \in LOOP(M)$. Por outro lado, se M_2 entrar em loop infinito isto não é problema, uma vez que, neste caso, certamente a entrada será aceita por M_1 e haverão dois caminhos em M, um de parada em configuração final (M_1) e outro de loop (M_2). Logo, $w \in ACEITA(M)$.
- Resposta: método anterior (simulação seqüencial e intercalada).

$L \times \overline{L}$

Possibilidades

Considere que as linhas representam L e as colunas representam $\overline{L}$. As seguintes combinações, e apenas essas, são possíveis:

	Recursiva	RE não-recursiva	Não-RE
Recursiva	✓	-	-
RE não-recursiva	-	-	✓
Não-RE	-	✓	✓

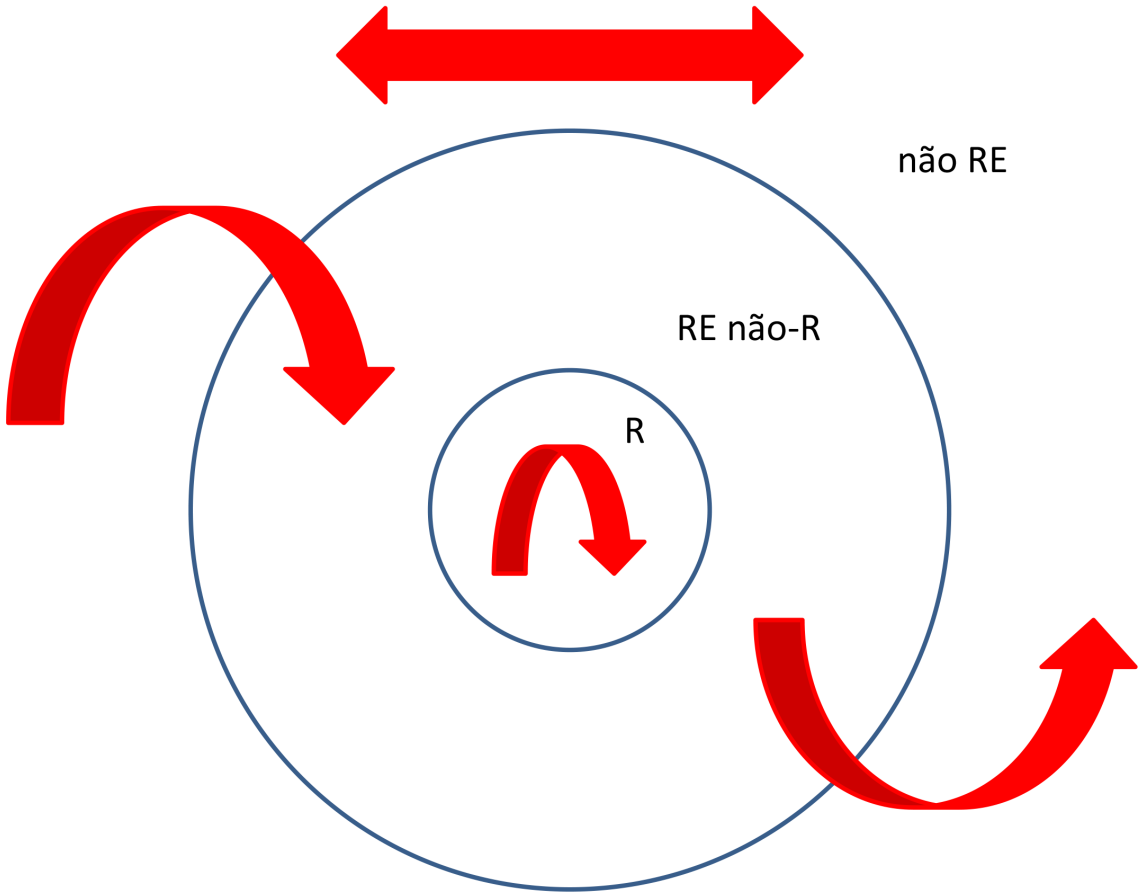
- O Teorema 2 exclui as possibilidades Recursiva/RE não-recursiva, Recursiva/Não-RE, RE não-recursiva/Recursiva e Não-RE/Recursiva (pois o complemento de uma linguagem recursiva é também uma linguagem recursiva);
- O Teorema 3 exclui a possibilidade RE não-recursiva/RE não-recursiva (pois se ambas são RE então o complemento é uma linguagem recursiva).

$L \times \overline{L}$

Problemas e seus complementos:

- O complemento de um problema solucionável é sempre um problema solucionável;
  - Não há loop com nenhuma cadeia de Σ^*;
- O complemento de um problema estritamente parcialmente solucionável é totalmente insolúvel:
  - Como existe pelo menos uma cadeia $w \in \Sigma^* - L$ que provoca loop, em $L' = \Sigma^* - L$ ela não será aceita;
- O complemento de um problema totalmente insolúvel pode ser estritamente parcialmente solucionável ou totalmente insolúvel:
  - Como existe pelo menos uma cadeia $w \in L$ que provoca loop, em $L' = \Sigma^* - L$ ela provoca loop também;
  - Se existe uma cadeia $w \in \Sigma^* - L$ que provoca loop, em $L' = \Sigma^* - L$ ela provoca loop também;

$L \times \overline{L}$



$L \times \overline{L}$

Exemplo

Considere a linguagem L_d:

- Conforme o Teorema 1, L_d é não-RE;
- Conseqüentemente, $\overline{L_d}$ deve ser RE não-recursiva ou não-RE;
- Certamente $\overline{L_d}$ não é recursiva;
- $L_d = \{w_i \,|\, w_i \notin L(M_i)\}$;
- $\overline{L_d} = \{w_i \,|\, w_i \in L(M_i)\}$;
- Conforme será provado mais adiante, $\overline{L_d}$ é RE não-recursiva.

Conceito

- Máquinas de Turing incorporam os programas que elas executam na sua definição;
- Como transformar uma Máquina de Turing em dados para outra Máquina de Turing processar?
- Resposta: Máquina de Turing Universal (U);
- Aceita como entrada a descrição de uma outra Máquina de Turing e a entrada que essa outra máquina deve processar;
- Podemos considerar, sem perda de generalidade, que a Máquina de Turing a ser simulada é determinística;
- Simula a máquina descrita e produz como resultado o mesmo resultado que a máquina simulada produziria;
- É universal pois é capaz de executar qualquer algoritmo.

Convenções

U possui quatro fitas:

- A primeira fita contém a descrição da máquina a ser simulada ($\langle M \rangle$) e a sua correspondente entrada (w);
- A segunda fita é usada para simular a fita da máquina a ser simulada (M); símbolos $X_i, i \geq 1$, são denotados 0^i e são separados na fita pelo símbolo 1; 0 representa 0, 00 representa 1 e 000 representa B;
- A terceira fita é usada para representar o estado de M; estados $q_i, i \geq 1$, são denotados 0^i;
- A quarta fita é usada para rascunho.

Convenções

Suponha $\langle M \rangle = C_1 11 C_2 11 ... 11 C_{n-1} 11 C_n$ e $w = 01011...$
Então:

Fita 1 <M>w	$C_1 11 C_2 11 ... 11 C_{n-1} 11 C_n 11101011 ...$												
	↑												
Fita 2 <w>	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	...
	↑													
Fita 3 q_i	0													
	↑													
Fita 4 aux														
	↑													

Inicialização

1) U verifica se $\langle M \rangle$ corresponde à descrição de uma Máquina de Turing válida; em caso negativo, U pára e rejeita a entrada (descrições inválidas representam máquinas que aceitam a linguagem vazia, portanto toda entrada deve ser rejeitada);
2) U copia a cadeia w da primeira para a segunda fita, codificando os seus símbolos da maneira apropriada (seqüências de 0 separadas pelo símbolo 1);
3) U posiciona a cabeça de leitura no primeiro símbolo da segunda fita;
4) Como, por convenção, o estado inicial de M é q_1, U grava o símbolo $0^1 = 0$ na terceira fita.

Operação

5) Se o símbolo gravado na posição corrente da segunda fita é 0^j (símbolo corrente de M) e a cadeia contida na terceira fita é 0^i (estado corrente de M), então U procura, na primeira fita, pela cadeia $0^i10^j10^k10^l10^m$, a qual representa a transição que seria executada por M nessa configuração (lembre-se que M é determinístico);
6) Caso não exista tal transição, então M pára e portanto U deve parar também;
7) Caso exista tal transição, então U:
   - Modifica o símbolo corrente de M na segunda fita (de 0^j para 0^l)
   - Modifica o estado corrente de M na terceira fita (de 0^i para 0^k);
   - Desloca a cabeça de leitura na segunda fita para o próximo símbolo da esquerda (se $m = 1$) ou da direita (se $m = 2$); lembre-se que os símbolos são cadeias de 0 separadas por 1;
   - Se o novo estado for 00 (que representa q_2, o estado final de M), então U pára e aceita a entrada.

Conclusão

- U simula M com a entrada w;
- U pára e aceita $\langle M \rangle w \Leftrightarrow M$ pára e aceita w;
- U pára e rejeita $\langle M \rangle w \Leftrightarrow M$ pára e rejeita w;
- U entra em loop infinito com $\langle M \rangle w \Leftrightarrow M$ entra em loop infinito com w;

Conceito

Suponha que $\langle M \rangle$ representa uma codificação de uma MT M sobre o alfabeto $\{0, 1\}$. Suponha que w é uma cadeia sobre esse mesmo alfabeto. A "linguagem universal":

$$L_u = \{\langle M \rangle w \mid M \text{ é uma MT que aceita } w\}$$

é aceita por U.

- O problema de determinar se uma Máquina de Turing M aceita a cadeia w pode ser traduzido...
- Pelo problema de determinar se $\langle M \rangle w \in L_u$...
- Ou seja, determinar se $\langle M \rangle w \in L(U)$;
- $L_u = L(U)$ é recursiva, RE não-recursiva ou não-RE?

Teorema 4

L_u é RE não-recursiva

L_u é RE:

- U é uma Máquina de Turing que aceita L_u.

Teorema 4

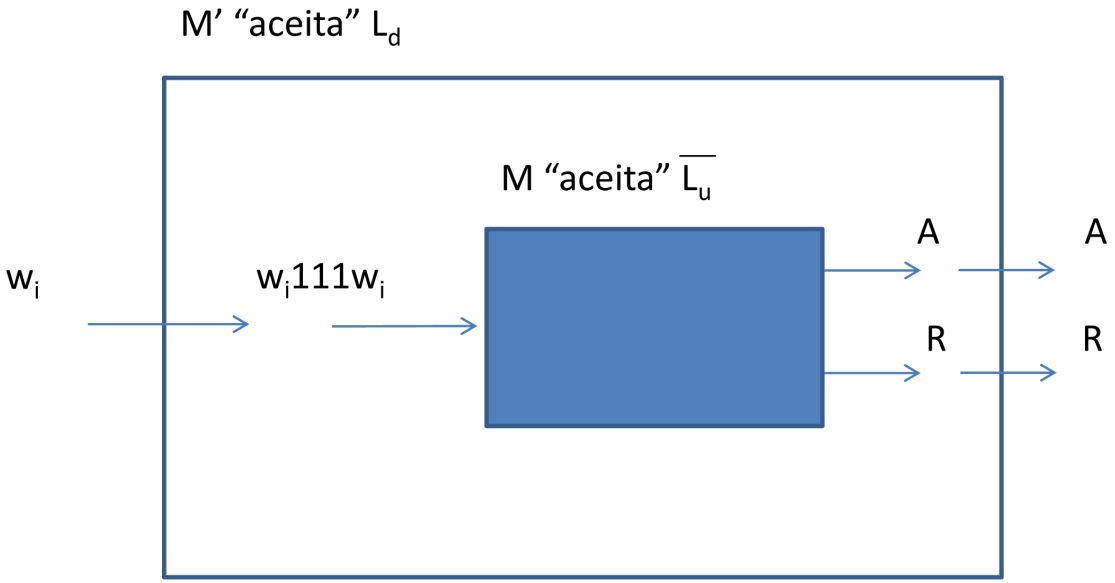
L_u é RE não-recursiva

L_u não é recursiva (Hopcroft):

- Suponha que L_u seja recursiva;
- Então, $\overline{L_u}$ também é recursiva;
- Considere que M é tal que $L(M) = \overline{L_u}$;
- Seja M' tal que, com a entrada w:
  - M' transforma w em $w111w$;
  - M' executa M com a entrada $w111w$;
  - Considere $w = w_i = \langle M_i \rangle$;
  - M aceita w_i111w_i se e somente se $w_i \notin L(M_i)$, ou seja, se $w_i \in L_d$; caso contrário M rejeita w_i111w_i;
  - Suponha que M' aceita quando M aceita e rejeita quando M rejeita;
  - Logo, M' decide L_d;
  - Como L_d é não-RE, a hipótese é falsa e L_u não pode ser recursiva.

Teorema 4

L_u é RE não-recursiva



Teorema 4

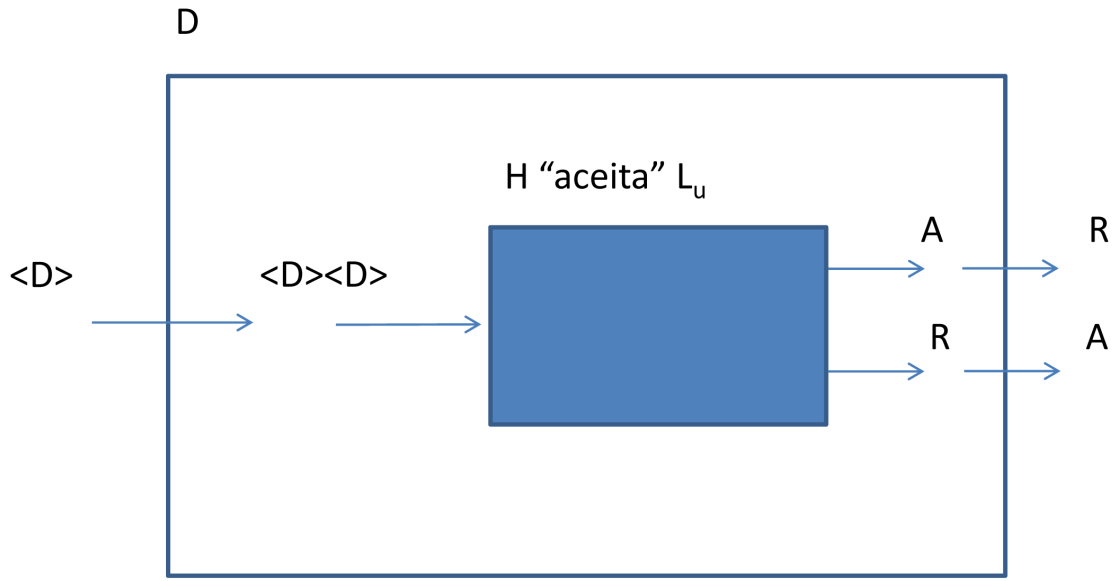
L_u é RE não-recursiva

L_u não é recursiva (Sipser):

- Suponha que L_u seja recursiva e que $H(\langle M \rangle w)$ decida L_u;
- Considere a máquina D:
  - D aceita como entrada $\langle M \rangle$;
  - D executa H com a entrada $\langle M \rangle \langle M \rangle$;
  - D aceita se H rejeita e rejeita se H aceita.
- Considere que D receba como entrada $\langle D \rangle$;
- Se D aceita $\langle D \rangle$ (pela execução de H) então D rejeita $\langle D \rangle$;
- Se D rejeita $\langle D \rangle$ (pela execução de H) então D aceita $\langle D \rangle$;
- Em qualquer caso, uma contradição; logo, a hipótese é falsa e L_u não é recursiva.

Teorema 4

L_u é RE não-recursiva



Teorema 4

Diagonalização

Para cada par linha/coluna (i, j), a tabela indica se M_i aceita w_j:

	1	2	3	4	...
1	✓			✓	...
2	✓	✓	✓	✓	...
3					...
4	✓	✓			...
...	...	...	...	...	...

Teorema 4

Diagonalização

Para cada par linha/coluna (i, j), a tabela indica o resultado produzido por H:

	1	2	3	4	...
1	✓	×	×	✓	...
2	✓	✓	✓	✓	...
3	×	×	×	×	...
4	✓	✓	×	×	...
...	...	...	...	...	...

Teorema 4

Diagonalização

Se existisse a Máquina de Turing D, a contradição aconteceria na posição $(\langle D \rangle, D)$:

	1	2	3	4	...	D	...
1	✓	×	×	✓	...	✓	...
2	✓	✓	✓	✓	...	✓	...
3	×	×	×	×	...	×	...
4	✓	✓	×	×	...	✓	...
...	...	...	...	...	...	...	...
<D>	×	×	✓	✓	...	?	...
...	...	...	...	...	...	...	...

Teorema 4

Conclusão

Se houvesse solução para o problema de determinar se uma Máquina de Turing não aceita uma cadeia qualquer ($\overline{L_u}$), haveria solução para o problema, mais simples, de determinar se uma Máquina de Turing não aceita uma cadeia específica (L_d).

Teorema 5

$\overline{L_d}$ é RE não-recursiva

$$\overline{L_d} = \{w_i \mid w_i \in L(M_i)\}$$

$\overline{L_d}$ é RE pois é aceita pela seguinte Máquina de Turing M:

- M aceita w_i como entrada;
- M transforma w_i em $w_i 111 w_i$ e simula a Máquna de Turing Universal U com essa cadeia;
- Se U pára e aceita, então M pára e aceita;
- Se U pára e rejeita, então M pára e rejeita;
- Se U entra em loop, então M entra em loop.

Conclusão: M aceita $\overline{L_d}$ e portanto $\overline{L_d}$ é RE.

Teorema 5

$\overline{L_d}$ é RE não-recursiva

$$\overline{L_d} = \{w_i \mid w_i \in L(M_i)\}$$

$\overline{L_d}$ é não-recursiva pois:

- Se $\overline{L_d}$ fosse recursiva, então L_d também deveria ser (pelo Teorema 2);
- Mas sabemos que L_d é não-RE (e conseqüentente não-recursiva).
- Logo, a hipótese é falsa e $\overline{L_d}$ não é recursiva.

Conclusão: $\overline{L_d}$ é RE não-recursiva.

Linguagens e complementos

Resumo até este ponto

- $L_d = \{w_i \,|\, w_i \notin L(M_i)\}$ é não-RE;
- $\overline{L_d} = \{w_i \,|\, w_i \in L(M_i)\}$ é RE não-recursiva;
- $L_u = \{\langle M \rangle w \,|\, M$ é uma MT que aceita $w\}$ é RE não-recursiva;
- $\overline{L_u} = \{\langle M \rangle w \,|\, M$ é uma MT que não aceita $w\}$ é não-RE.

Conceito

- Técnica para determinar a decidibilidade de um problema a partir de outro cuja natureza é conhecida;
- Uma redução é uma maneira de converter um problema em outro de tal forma que uma solução para o segundo problema possa ser usada para resolver o primeiro problema;

Exemplos

Uma solução para P_2 é uma solução para P_1:

- P_1: orientar-se numa nova cidade;
  P_2: obter um mapa;
- P_1: viajar de São Paulo para New York;
  P_2: comprar uma passagem de avião;
- P_1: comprar uma passagem de avião;
  P_2: dispor do dinheiro necessário;
- P_1: dispor do dinheiro necessário;
  P_2: conseguir um trabalho.

Exemplos

Uma solução para P_2 é uma solução para P_1:

- P_1: medir a área de um retângulo;
  P_2: medir o seu comprimento e largura;
- P_1: resolver um sistema de equações lineares;
  P_2: inverter uma matriz;
- P_1: provar que uma linguagem L não é regular;
  P_2: encontrar $w = xyz \in L$ tal que $|w| > n$, $|y| \geq 1$ e, para algum $i \geq 0$, $xy^iz \notin L$;
- P_1: construir um analisador sintático determinístico para uma linguagem L;
  P_2: obter uma gramática $LR(k)$ que gera L.

Conceito

Se existe uma redução de P_1 para P_2, então diz-se que:

- P_1 "não é mais difícil do que" P_2;
- P_2 "é no mínimo tão difícil quanto" P_1.

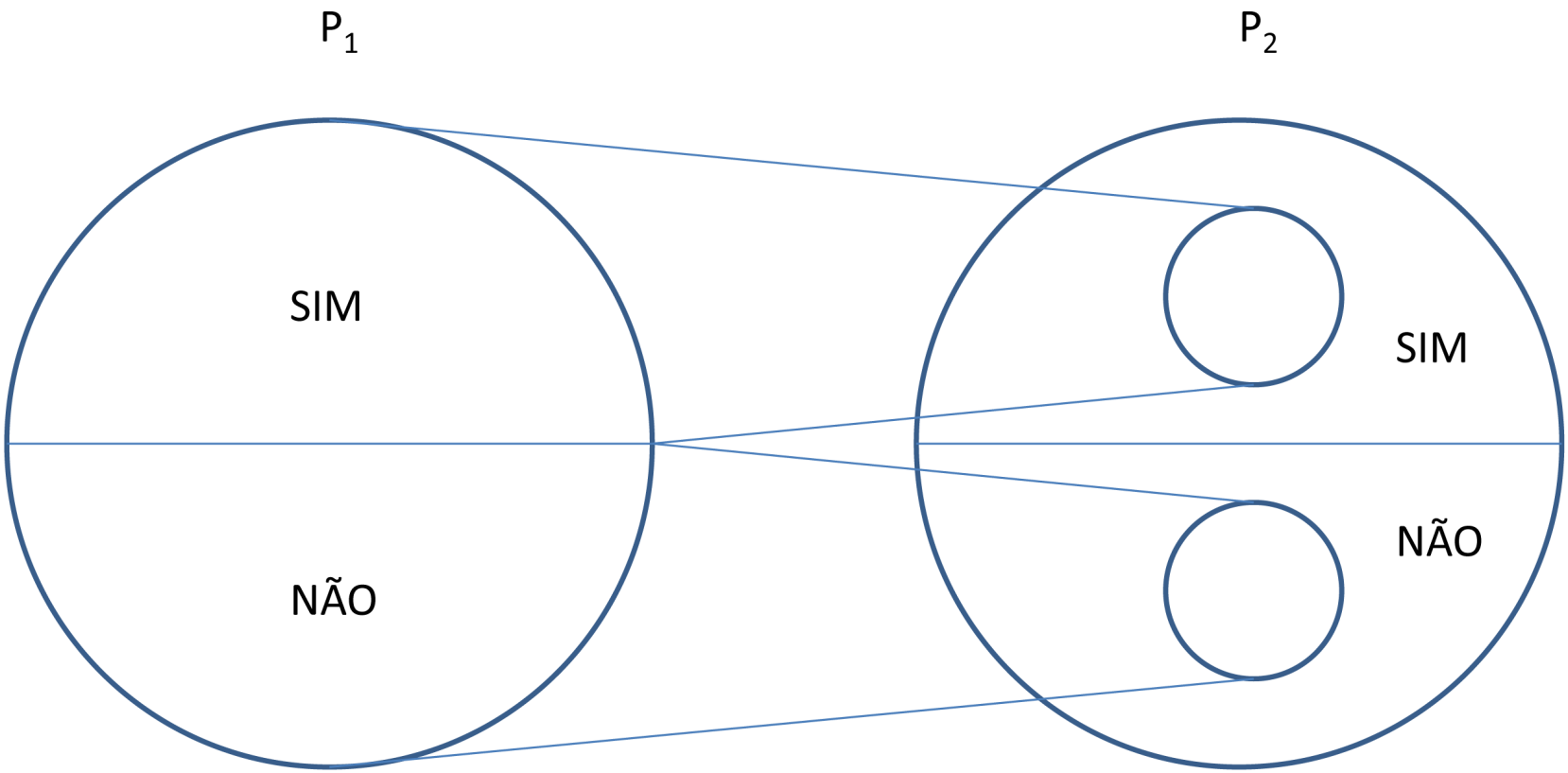
Definição

- Uma redução de P_1 para P_2 é uma função total f que mapeia sentenças de P_1 para sentenças de P_2:

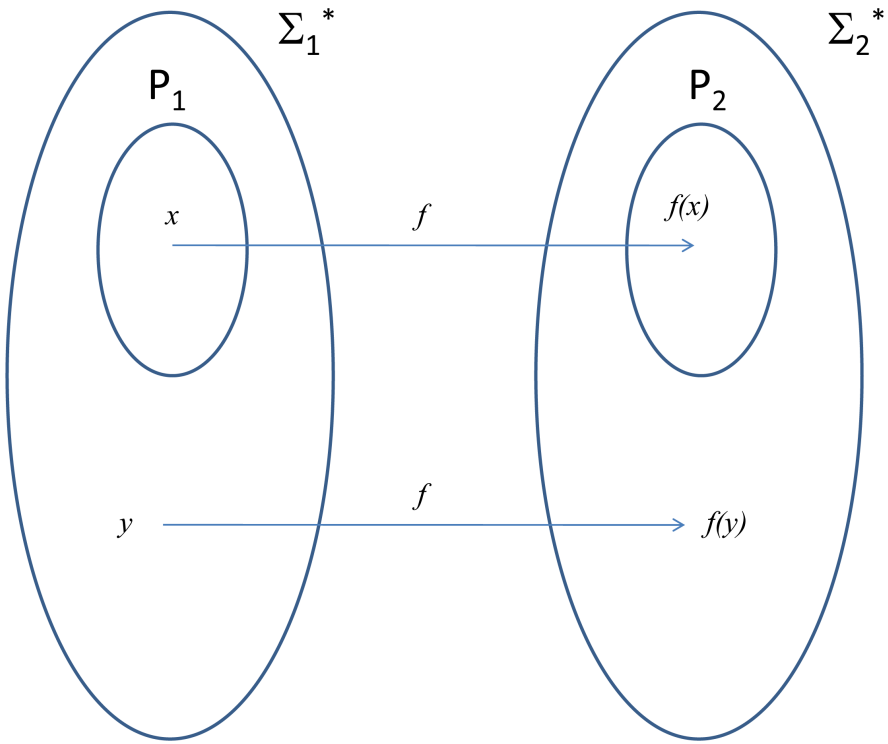
$$w \in P_1 \Leftrightarrow f(w) \in P_2$$

- Uma redução também pode ser vista como uma MT (algoritmo) que mapeia sentenças de P_1 em sentenças de P_2;
- A função de mapeamento f não necessita ser sobrejetora nem injetora.

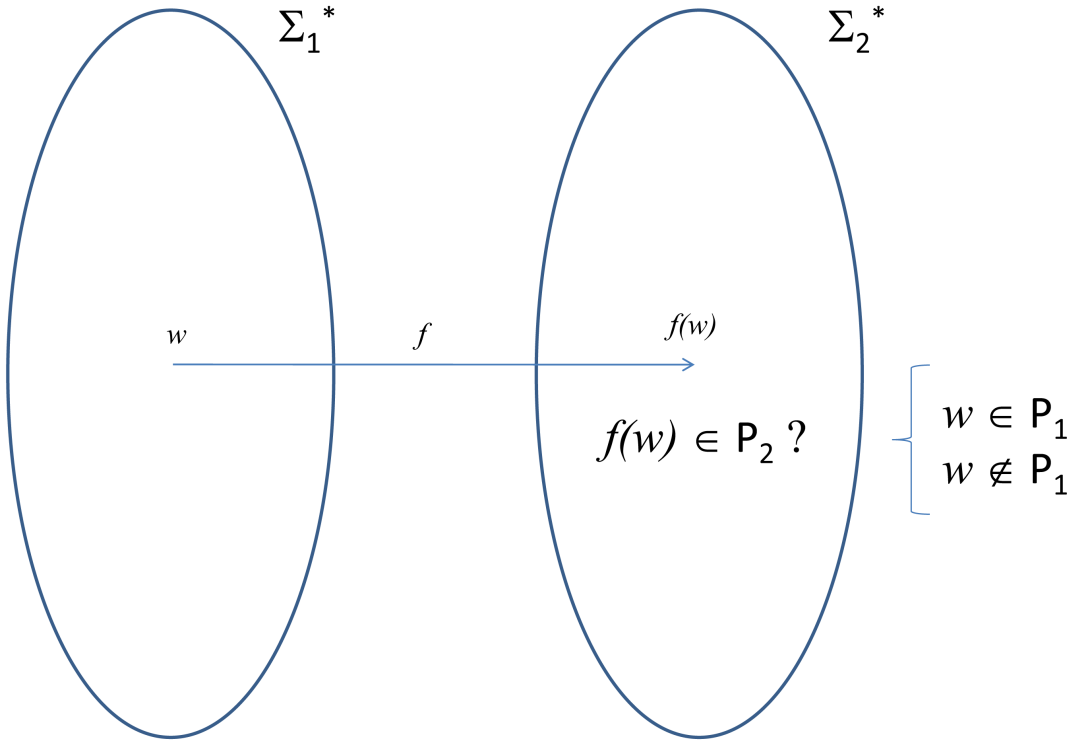
Redução de P_1 para P_2



Redução de P_1 para P_2



Redução de P_1 para P_2



Teorema 6

Enunciados

Se f é uma redução de P_1 para P_2, então:

1. Se P_1 é indecidível, então P_2 também é indecidível;
2. Se P_1 é não-RE, então P_2 também é não-RE.

Teorema 6

P_1 indecidível $\Rightarrow$ P_2 indecidível

Suponha que P_2 seja decidível. Então é possível combinar o algoritmo que decide P_2 com a redução f para obter um algoritmo que decide P_1.

- Seja $w \in \Sigma_1^*$ (Σ_1 é o alfabeto de P_1);
- Obter $f(w)$;
- Como P_2 é decidível, por hipótese, é possível determinar se $f(w) \in P_2$;
- Em caso afirmativo, e como f é uma redução, é certo que $w \in P_1$;
- Em caso negativo, e como f é uma redução, é certo que $w \notin P_1$;
- Em qualquer caso é possível determinar se $w \in P_1$;
- Logo, P_1 seria decidível;
- Mas isso contrária a hipótese, portanto P_2 não pode ser decidível.

Teorema 6

P_1 não-RE $\Rightarrow$ P_2 não-RE

Suponha que P_2 seja RE. Então é possível combinar a MT M_2 que aceita P_2 com a redução f para obter uma MT M_1 que aceita P_1.

- Seja $w \in \Sigma_1^*$;
- Obter $f(w)$;
- Executar M_2 com a entrada $f(w)$;
- Se M_2 aceita $f(w)$, então $w \in P_1$;
- Se M_2 não aceita $f(w)$ (M_2 pára e rejeita ou entra em loop), então $w \notin P_1$;
- Logo, é possível construir M_1 que aceita P_1;
- Mas isso contrária a hipótese, portanto P_2 não pode ser RE.

Teorema 6

Enunciados com corolários

Se f é uma redução de P_1 para P_2, então:

1. Se P_1 é indecidível, então P_2 também é indecidível;
   Se P_2 é decidível, então P_1 também é decidível;
2. Se P_1 é não-RE, então P_2 também é não-RE;
   Se P_2 é RE, então P_1 também é RE.

Teorema 6

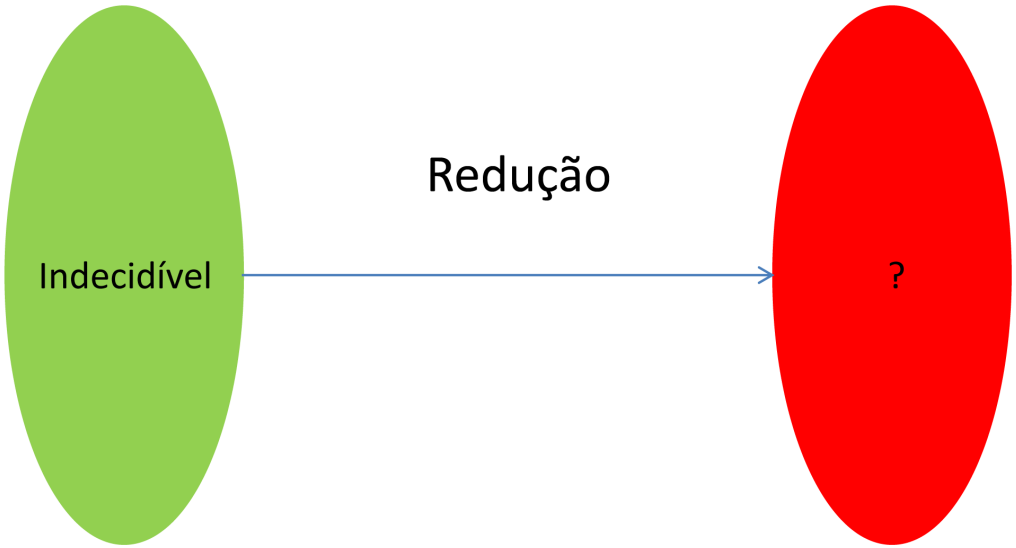
Estratégias

Aplicação do teorema (parte 1):

- Para demonstrar que um problema P_2 de natureza desconhecida é indecidível:
  - Obter uma redução de um problema P_1, reconhecidamente indecidível, para P_2;
- Para demonstrar que um problema P_1 de natureza desconhecida é decidível:
  - Obter uma redução de P_1 para um problema P_2, reconhecidamente decidível;

Teorema 6

Estratégias



Teorema 6

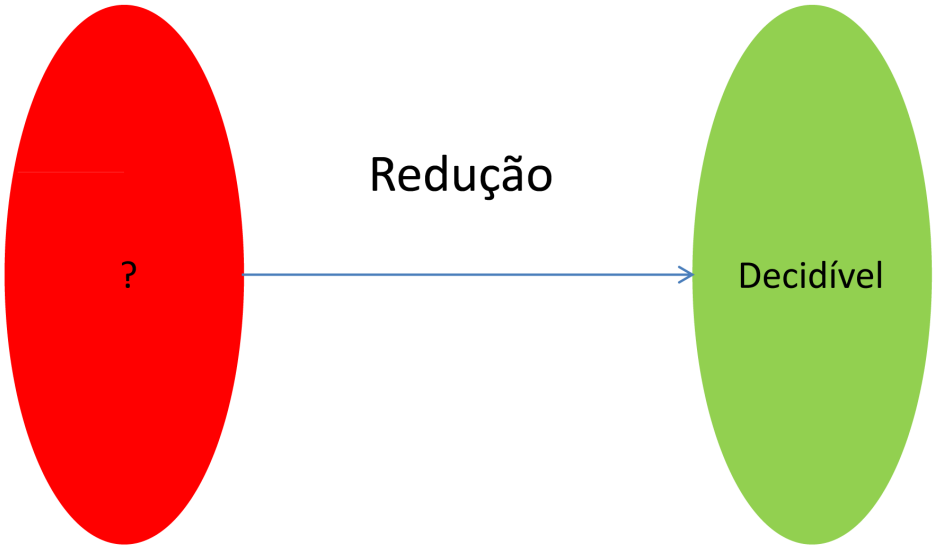
Estratégias

E o contrário? Haveria interesse em reduzir um problema P_1 de natureza desconhecida para um problema P_2 reconhecidamente indecidível?

- Qual o interesse em fazer isso?
- Como P_2 é indecidível, tal fato não permite obter nenhuma conclusão em relação à P_1;
- Não adianta para nada, portanto.

Teorema 6

Estratégias



Teorema 6

Estratégias

E o contrário? Haveria interesse em reduzir um problema P_1 reconhecidamente decidível para um problema P_2 de natureza desconhecida?

- Só seria útil se fosse possível obter f^{-1} (a função de redução inversa);
- Nesse caso, dada uma instância $w \in P_2$ seria possível combinar a aplicação de f^{-1} com a decisão de P_1 para determinar se $w \in P_1$;
- Vale lembrar que f não é necessariamente injetora e nem, principalmente, sobrejetora, o que dificulta a obtenção de f^{-1} com as características necessárias;
- Mas essa estratégia recai exatamente no caso direto;
- Não adianta nada, portanto.

Teorema 6

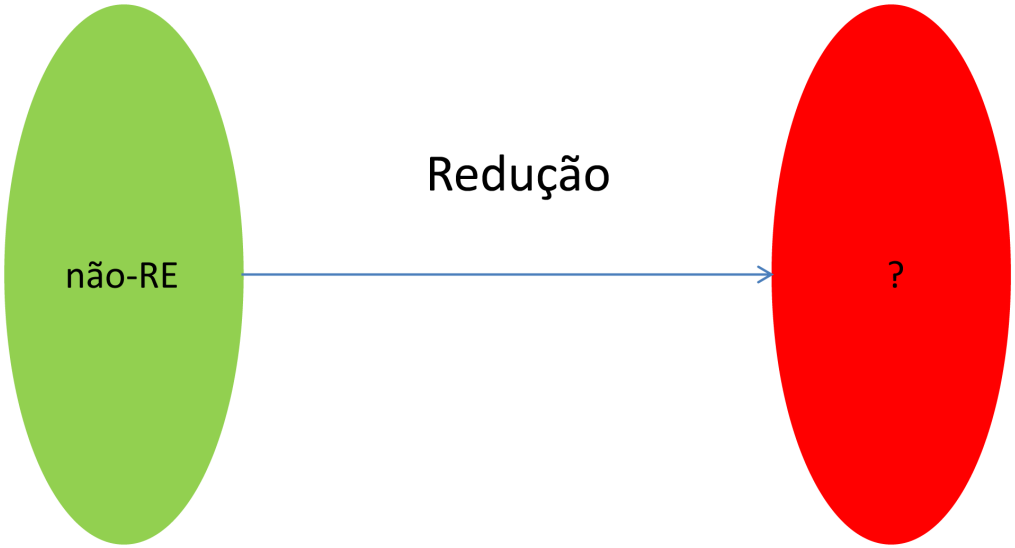
Estratégias

Aplicação do teorema (parte 2):

- Para demonstrar que um problema P_2 de natureza desconhecida é não-RE:
  - Obter uma redução de um problema P_1, reconhecidamente não-RE, para P_2;
- Para demonstrar que um problema P_1 de natureza desconhecida é RE:
  - Obter uma redução de P_1 para um problema P_2, reconhecidamente RE;

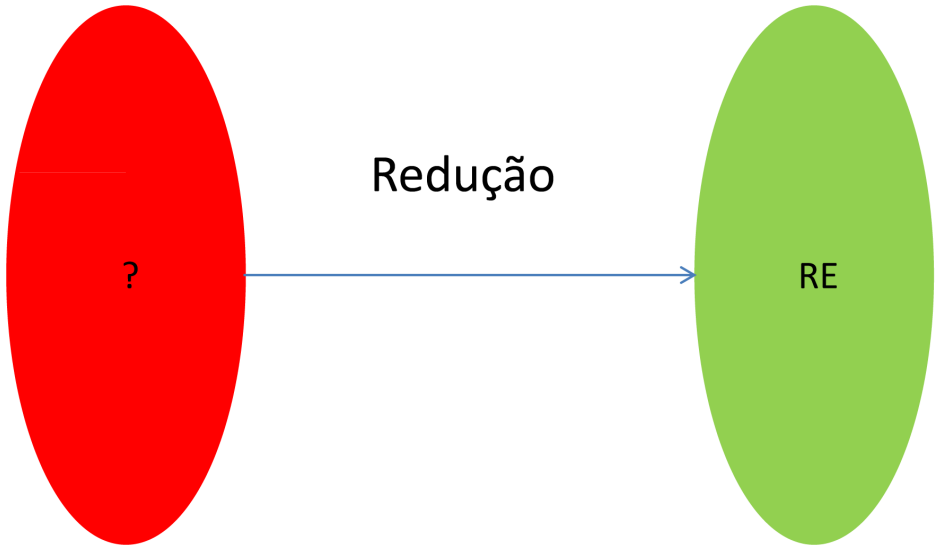
Teorema 6

Estratégias



Teorema 6

Estratégias



Reduções com L_u e L_d

1. L_u é indecidível (RE não-recursiva);
2. L_d é não-RE;
3. L_u pode ser usada para demonstrar que um problema P qualquer (RE ou não-RE) é indecidível:
   - Basta obter uma redução de L_u para P;
4. L_d pode ser usada para demonstrar que um problema P é não-RE:
   - Basta obter uma redução de L_d para P;
5. L_d não pode ser usada para demonstrar a indecidibilidade de um problema que é RE porém é não-recursivo (pois L_d é não-RE e só reduz para P não-RE); para esses casos deve-se usar L_u;
6. L_u não pode ser usada para demonstrar que um problema é não-RE (pois L_u é RE não-recursivo e só reduz para P não-recursivo, sem discriminar se P é RE ou não-RE); para esses casos deve-se usar L_d.

Conceito

Suponha que $\langle M \rangle$ representa uma codificação de M sobre o alfabeto $\{0, 1\}$. Suponha que w é uma cadeia sobre esse mesmo alfabeto.
A "linguagem da parada" é definida como:

$$PARA_{MT} = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ pára com a entrada } w\}$$

- Corresponde ao problema fundamental de determinar se um programa qualquer pára com uma entrada qualquer;
- $PARA_{MT}$ é decidível ou indecidível?

Teorema 7

$PARA_{MT}$ é indecidível através de redução

Função f que reduz L_u para $PARA_{MT}$:

- $L_u = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ aceita a entrada } w\}$
- $PARA_{MT} = \{\langle M', w\rangle \mid M' \text{ pára com a entrada } w\}$
- A redução f é computada pela seguinte MT:
  - A partir da entrada $\langle M, w\rangle$, construir M' de tal forma que M' simula M com a entrada w;
  - Se M aceita w, então M' aceita w;
  - Se M rejeita w, então M' entra em loop (e, naturalmente, se M entra em loop, então M' também entra em loop);
- $\langle M, w\rangle \in L_u \Leftrightarrow \langle M', w\rangle \in PARA_{MT}$;
- Como L_u é indecidível, $PARA_{MT}$ também é indecidível.

Teorema 7

$PARA_{MT}$ é indecidível através de redução

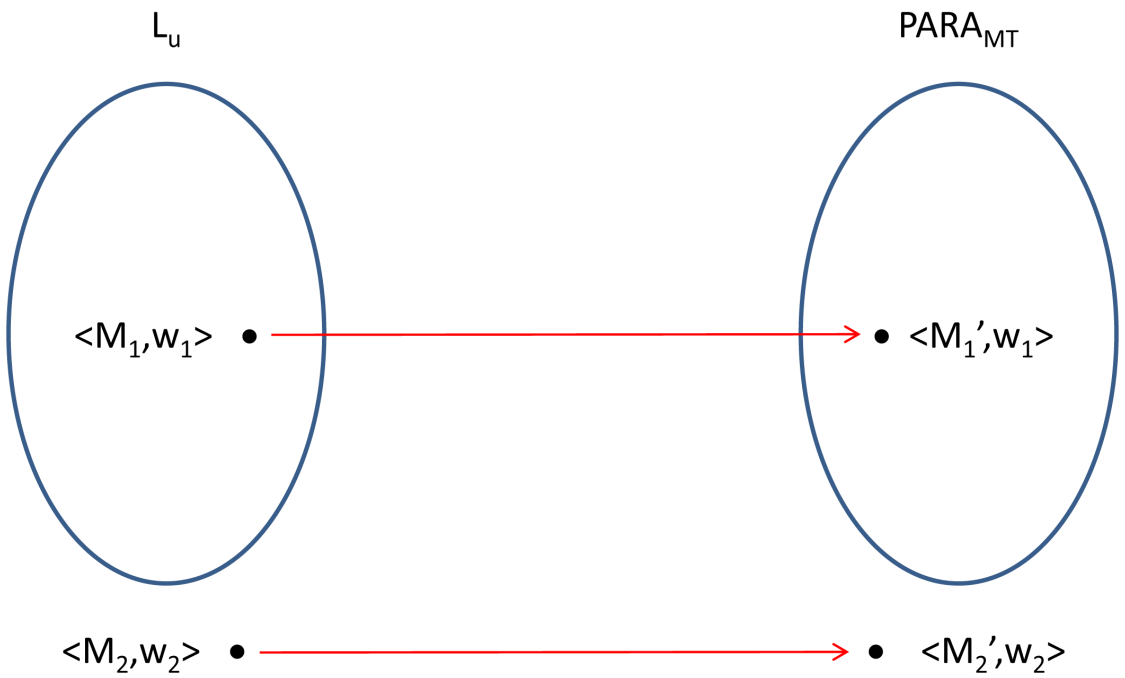
Obtenção de $\langle M', w \rangle$ a partir de $\langle M, w \rangle$:

- M' simula M com a entrada w;
- Se M aceita w, $\langle M, w \rangle \in L_u$ e M' deve aceitar w, pois dessa forma $\langle M', w \rangle \in PARA_{MT}$;
- Se M rejeita w, $\langle M, w \rangle \notin L_u$ e M' deve entrar em loop infinito, pois dessa forma $\langle M', w \rangle \notin PARA_{MT}$;
- Se M entra em loop infinito com w, $\langle M, w \rangle \notin L_u$ e M' entra automaticamente em loop infinito também. Portanto, $\langle M', w \rangle \notin PARA_{MT}$;

Logo, $\langle M, w \rangle \in L_u \Leftrightarrow \langle M', w \rangle \in PARA_{MT}$

Teorema 7

$PARA_{MT}$ é indecidível através de redução



Teorema 7

$PARA_{MT}$ é RE

Basta simular M com a entrada w e gerar, na saída, o mesmo resultado da simulação.

- $PARA_{MT} = \{\langle M, w\rangle \mid M$ pára com a entrada $w\}$ é RE não-recursiva, portanto o problema é parcialmente solucionável;
- $\overline{PARA_{MT}} = \{\langle M, w\rangle \mid M$ entra em loop com a entrada $w\}$, no entanto, é não-RE, e portanto completamente insolúvel.

Teorema 7

$PARA_{MT}$ é indecidível através de contradição

Suponha que $PARA_{MT}$ é decidível. Então, a partir da MT R que decide $PARA_{MT}$, é possível obter uma outra MT S que decide L_u:

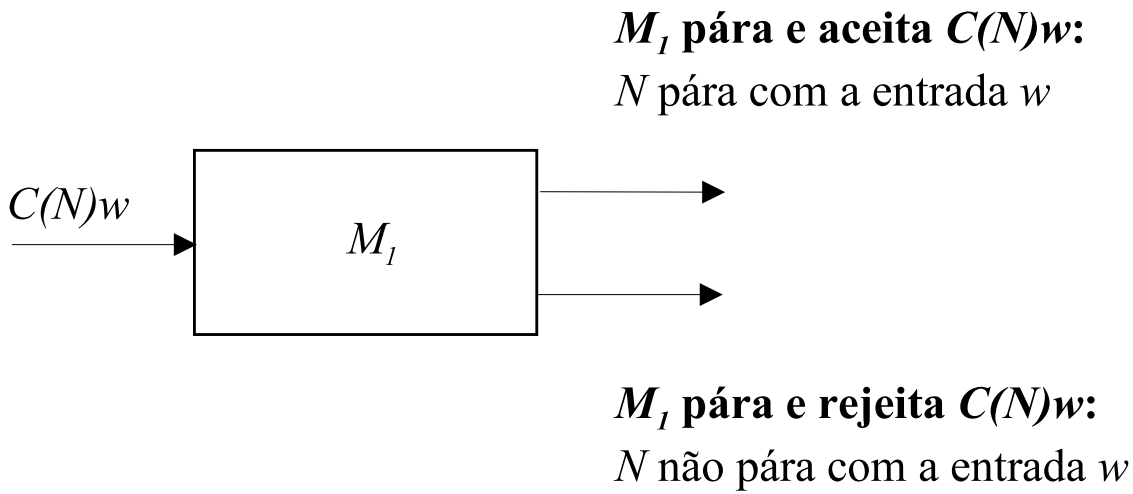
- Executar R sobre a entrada $\langle M, w \rangle$;
- Se R rejeita, S também rejeita;
- Se R aceita, simular M com a entrada w até M parar;
- Se M aceita, S também aceita;
- Se M rejeita, S também rejeita.

Se R decide $PARA_{MT}$, então S decide L_u. Como é sabido que L_u é indecidível, a hipótese de que R existe é falsa e $PARA_{MT}$ é indecidível.

Teorema 7

$PARA_{MT}$ é indecidível através de diagramas

Supor que $PARA_{MT}$ é decidível. Então existe M_1:

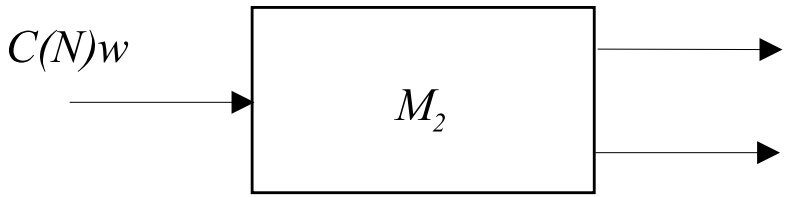


Teorema 7

$PARA_{MT}$ é indecidível através de diagramas

Construir M_2 a partir de M_1:

M_2 executa uma seqüência infinita de movimentações:
N pára com a entrada w

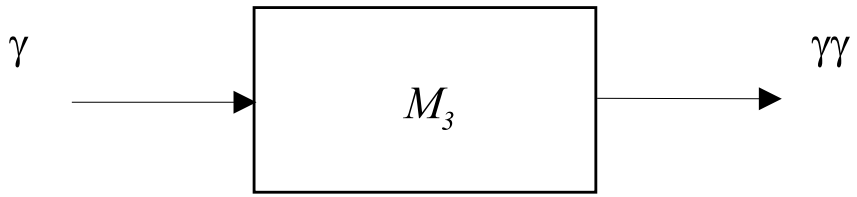


M_2 pára e rejeita $C(N)w$:
N não pára com a entrada w

Teorema 7

$PARA_{MT}$ é indecidível através de diagramas

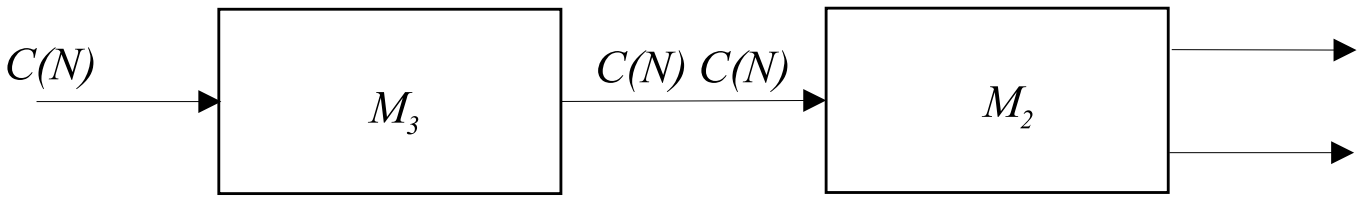
Construir M_3:



Teorema 7

$PARA_{MT}$ é indecidível através de diagramas

Combinar M_3 e M_2:



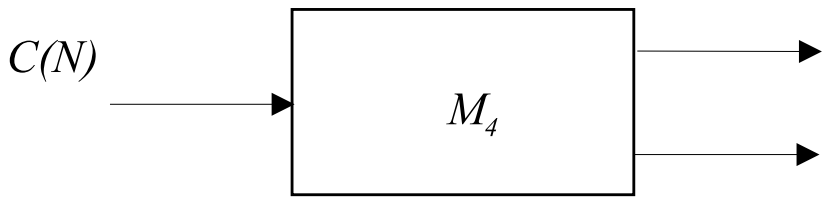
M_2 executa uma seqüência infinita de movimentações:
N pára com a entrada *C(N)*

M_2 pára:
N não pára com a entrada *C(N)*

Teorema 7

$PARA_{MT}$ é indecidível através de diagramas

Renomear para M_4:



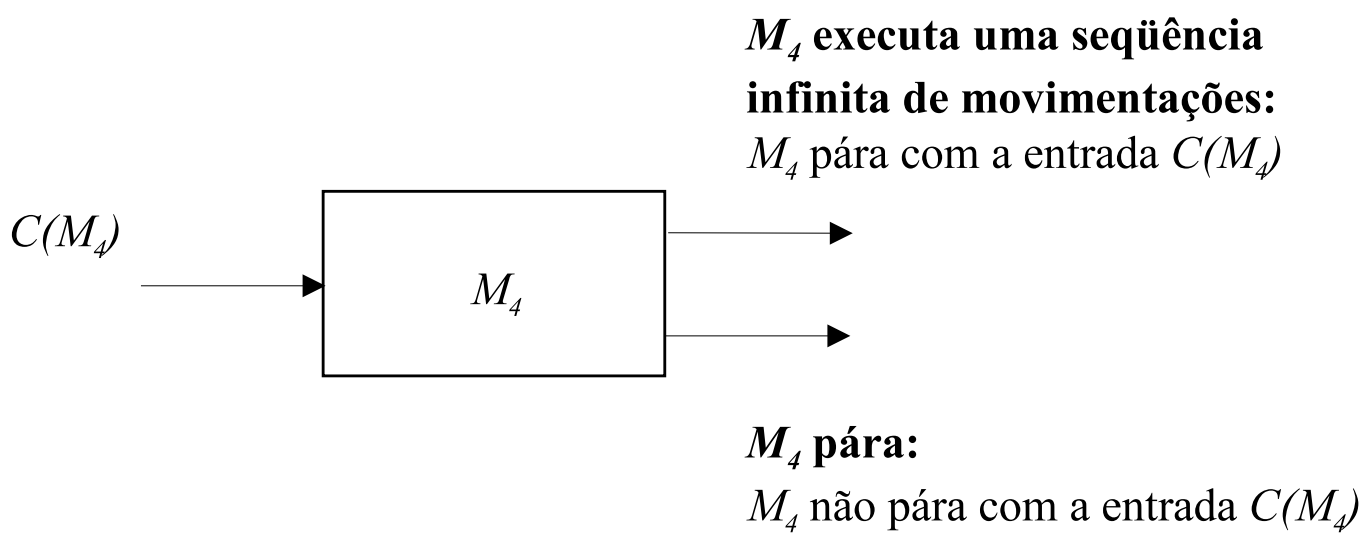
M_4 executa uma seqüência infinita de movimentações:
N pára com a entrada *C(N)*

M_4 pára:
N não pára com a entrada *C(N)*

Teorema 7

$PARA_{MT}$ é indecidível através de diagramas

Fornecer para M_4 a sua própria descrição:



Teorema 7

$PARA_{MT}$ é indecidível através de diagramas

Conclusão:

- Por um lado, temos a informação de que, ao analisar a cadeia $C(M_4)$, se a máquina M_4 parar, então M_4 executa uma seqüência infinita de movimentações;
- Por outro, que ao analisar a cadeia $C(M_4)$, se M_4 não parar, então M_4 pára. Tem-se, portanto, uma contradição;
- Logo, a hipótese inicial não é válida, ou seja, não existe M_1 que decida $PARA_{MT}$;
- $PARA_{MT}$ é indecidível.

Linguagens e complementos

Resumo até este ponto

- $L_d = \{w_i \mid w_i \notin L(M_i)\}$ é não-RE;
- $\overline{L_d} = \{w_i \mid w_i \in L(M_i)\}$ é RE não-recursiva;
- $L_u = \{\langle M \rangle w \mid M$ é uma MT que aceita $w\}$ é RE não-recursiva;
- $\overline{L_u} = \{\langle M \rangle w \mid M$ é uma MT que não aceita $w\}$ é não-RE;
- $PARA_{MT} = \{\langle M', w \rangle \mid M'$ pára com a entrada $w\}$ é RE não-recursiva;
- $\overline{PARA_{MT}} = \{\langle M', w \rangle \mid M'$ entra em loop com a entrada $w\}$ é não-RE.

Definições

Considere $\langle M \rangle$ como a codificação de uma MT M sobre o alfabeto $\{0, 1\}$. Então:

- $L_e = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset\}$
- $L_{ne} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \neq \emptyset\}$
- $L_e = \overline{L_{ne}}$

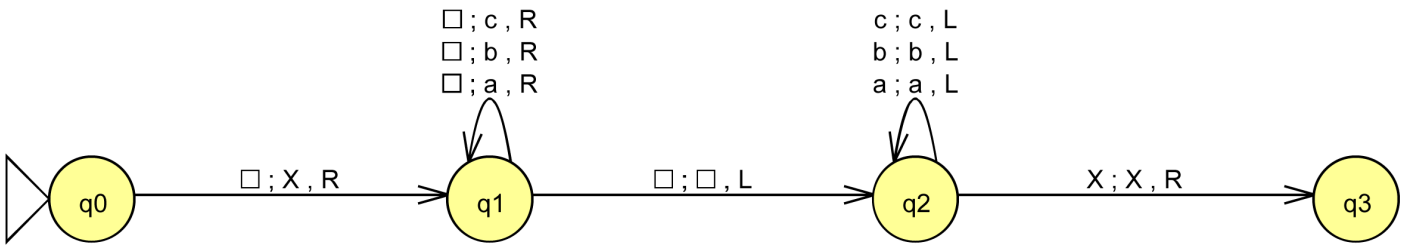
L_{ne} é RE

Teorema: A linguagem L_{ne} é recursivamente enumerável.
Prova:

1. Construir uma MT M que aceita como entrada a codificação de uma outra MT M';
2. M opera de forma não-determinística, fazendo escolhas de cadeias arbitrárias para serem testadas em M';
3. Em cada ramo da sua execução não-determinística, M gera uma cadeia e testa se M' aceita a mesma;
4. Para isso, M simula a máquina U que aceita a linguagem L_u;
5. Se algum caminho de M' for de aceitação, então M pára e aceita a sua entrada (M');

L_{ne} é RE

Exemplo: Geração não-determinística de cadeias arbirtrárias sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$ para serem posteriormente testadas:



L_{ne} é RE

Em resumo:

- Se M' aceita alguma cadeia, M "adivinha" essa cadeia e aceita M';
- Se M' não aceita nenhuma cadeia, então não há cadeia que conduza à aceitação em M' e M não aceita M' (nesse caso, M pode rejeitar M' ou entrar em loop);
- Portanto, $L(M) = L_{ne}$.

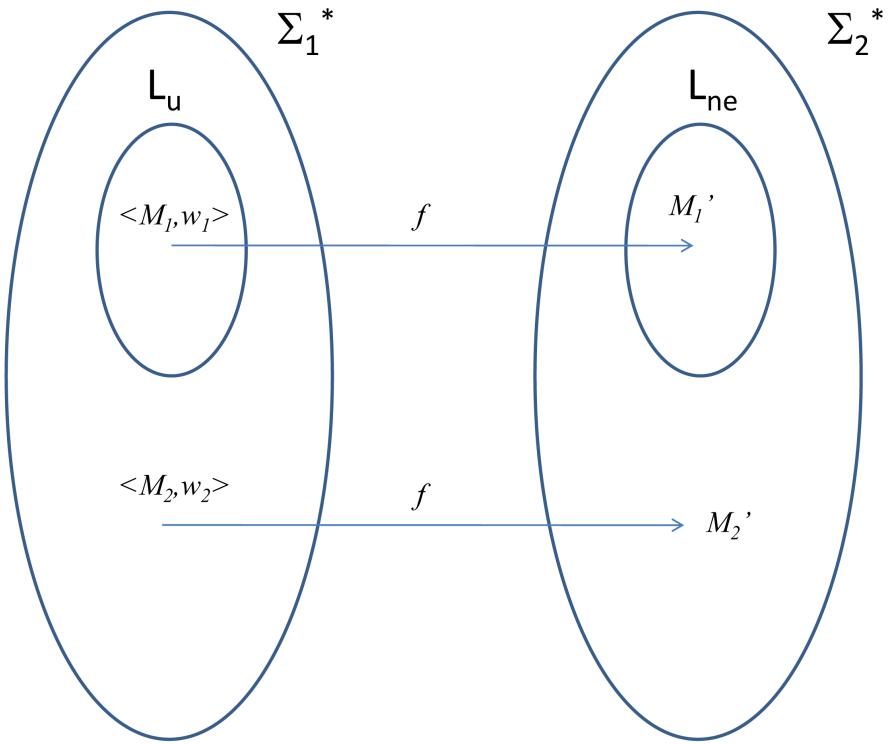
L_{ne} não é recursiva

Idéia geral:

- Fazer uma redução de L_u para L_{ne};
- Construir M' a partir de $\langle M, w \rangle$ tal que:
  - Se $w \in L(M)$, então $L(M') \neq \emptyset$;
  - Se $w \notin L(M)$, então $L(M') = \emptyset$;
- M' ignora a sua entrada e simula M com a entrada w;
- Se M aceita w, M' também aceita a sua entrada, qualquer que seja ela.

L_{ne} não é recursiva

- M_1 aceita $w_1 \Rightarrow \langle M_1, w_1 \rangle \in L_u \Rightarrow L(M_1') \neq \emptyset \Rightarrow \langle M_1' \rangle \in L_{ne}$;
- M_2 não aceita $w_2 \Rightarrow \langle M_2, w_2 \rangle \notin L_u \Rightarrow L(M_2') = \emptyset \Rightarrow \langle M_2' \rangle \notin L_{ne}$;



L_{ne} não é recursiva

Teorema: A linguagem L_{ne} não é recursiva.
Prova:

1. É suficiente provar a existência de um algoritmo que efetua a redução de L_u para L_{ne};
2. O algoritmo deve mapear $\langle M, w \rangle$ em M' de tal forma que $w \in L(M) \Leftrightarrow L(M') \neq \emptyset$;
3. A construção de M' a partir de $\langle M, w \rangle$ é detalhada a seguir;

L_{ne} não é recursiva

4. M' ignora a sua entrada x, qualquer que seja ela. M' substitui x por $\langle M, w \rangle$, tomando o cuidado de trocar os símbolos finais de x por brancos, caso $|x| > |\langle M, w \rangle|$;
5. M' posiciona a cabeça de leitura/escrita sobre o primeiro símbolo da cadeia $\langle M, w \rangle$;
6. M' simula a Máquina Universal U com a entrada $\langle M, w \rangle$;
7. Se U aceita $\langle M, w \rangle$, então M' pára e aceita a sua entrada, qualquer que seja ela e $L(M') \neq \emptyset$ (e se U não aceita $\langle M, w \rangle$, então M' não aceita nenhuma entrada e $L(M') = \emptyset$).

L_{ne} não é recursiva

Em resumo:

- Existe um algoritmo que reduz L_u para L_{ne};
  - M' aceita qualquer cadeia de entrada (e portanto $\langle M' \rangle \in L_{ne}$) sse $w \in L(M)$ (ou seja, se $\langle M, w \rangle \in L_u$);
  - M' não aceita nenhuma cadeia de entrada (e portanto $\langle M' \rangle \notin L_{ne}$) sse $w \notin L(M)$ (ou seja, se $\langle M, w \rangle \notin L_u$);
- Como L_u é indecidível, então L_{ne} é indecidível.

L_{ne} não é recursiva

Suponha que L_{ne} fosse decidível. Então seria possivel decidir L_u, da seguinte forma:

- Fazer a redução de $\langle M, w \rangle$ para M';
- Decidir se $L(M') \neq \emptyset$, ou seja, se $\langle M' \rangle \in L_{ne}$;
- Em caso afirmativo, $\langle M, w \rangle \in L_u$, ou seja, $w \in L(M)$;
- Em caso negativo, $\langle M, w \rangle \notin L_u$, ou seja, $w \notin L(M)$;

Mas como é sabido que L_u não é recursiva, então a suposição de que L_{ne} é recursiva é falsa.

L_e é não-RE

Teorema: L_e não é recursivamente enumerável.
Prova:

1. Suponha que L_e seja recursivamente enumerável;
2. Portanto, de acordo com um teorema anterior, tanto L_e quanto $\overline{L_e}$ devem ser recursivas;
3. Mas $\overline{L_e} = L_{ne}$;
4. Além disso, foi demonstrado que L_{ne} não é recursiva;
5. Logo, L_e não é recursivamente enumerável.

Linguagens e complementos

Resumo até este ponto

- $L_d = \{w_i \mid w_i \notin L(M_i)\}$ é não-RE;
- $\overline{L_d} = \{w_i \mid w_i \in L(M_i)\}$ é RE não-recursiva;
- $L_u = \{\langle M \rangle w \mid M$ é uma MT que aceita $w\}$ é RE não-recursiva;
- $\overline{L_u} = \{\langle M \rangle w \mid M$ é uma MT que não aceita $w\}$ é não-RE;
- $PARA_{MT} = \{\langle M', w \rangle \mid M'$ pára com a entrada $w\}$ é RE não-recursiva;
- $\overline{PARA_{MT}} = \{\langle M', w \rangle \mid M'$ entra em loop com a entrada $w\}$ é não-RE;
- $L_e = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset\}$ é não-RE;
- $L_{ne} = \overline{L_e} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \neq \emptyset\}$ é RE não-recursiva.

Enunciado

Teorema: Qualquer propriedade não-trivial das linguagens recursivamente enumeráveis é indecidível.

- Propriedade?
- Não-trivial?

Propriedade não-trivial

Propriedade:

- Condição que deva ser satisfeita por um grupo de linguagens;
- Um conjunto de linguagens que satisfazem uma certa condição.

Não-trivial:

- Condição que seja satisfeita por pelo menos uma linguagem e que não seja satisfeita por pelo menos uma linguagem;
- Caso contrário, ou seja, se a propriedade é satisfeita por todas as linguagens ou então não e satisfeita por nenhuma linguagem, então ela é dita "trivial";
- Propriedade não-trivial exclui todas as propriedades triviais.

As linguagens RE serão representadas pelas MT que as aceitam, pois essas máquinas são descrições finitas de tais linguagens.

Exemplos

Dada uma MT M qualquer:

- $L(M) = \emptyset$? $L(M) \neq \emptyset$?
- $\epsilon \in L(M)$?
- $w \in L(M)$?
- $L(M)$ é finita? $L(M)$ é infinita?
- $L(M)$ contém pelo menos duas cadeias?
- $L(M)$ é regular?
- $L(M)$ é livre de contexto?
- $L(M) = \Sigma^*$?
- $L(M) = L(M)^R$?
- etc.

Exemplos

- $L(M) = \emptyset$?
  Demonstrada indecidível anteriormente através do problema de decisão L_e ($\langle M \rangle \in L_e$?)
- $L(M) \neq \emptyset$?
  Demonstrada indecidível anteriormente através do problema de decisão L_{ne} ($\langle M \rangle \in L_{ne}$?)
- Demais propriedades:
  Considerar $\mathcal{P}$ como o conjunto de todas as linguagens que satisfazem a propriedade;
  Considerar a linguagem $M_{\mathcal{P}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \in \mathcal{P}\}$;
  $M_{\mathcal{P}}$ é o conjunto de todas as codificações de Máquinas de Turing que aceitam as linguagens pertencentes à $\mathcal{P}$;
  Determinar se $L(M) \in \mathcal{P}$ é o mesmo que determinar se $\langle M \rangle \in M_{\mathcal{P}}$.

Demonstração

Teorema: Qualquer propriedade não-trivial das linguagens recursivamente enumeráveis é indecidível.
Prova:

1. Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade não-trivial das linguagens RE;
2. Suponha que a linguagem vazia ($\emptyset$) não pertence à $\mathcal{P}$;
3. Como $\mathcal{P}$ é não-trivial, então existe pelo menos uma linguagem $L \in \mathcal{P}$;
4. Considere essa linguagem L e M_L tal que $L = L(M_L)$;
5. Fazer uma redução de L_u para $M_{\mathcal{P}}$ (conforme explicado a seguir):
   - M aceita $w \Rightarrow M'$ aceita L, portanto $M' \in M_{\mathcal{P}}$;
   - M não aceita $w \Rightarrow M'$ aceita $\emptyset$, portanto $M' \notin M_{\mathcal{P}}$.
6. Como L_u é indecidível, conclui-se que $M_{\mathcal{P}}$ também é indecidível.

Redução de L_u para $L_{\mathcal{P}}$

Obtenção de M' a partir de $\langle M, w \rangle$ tal que $\langle M, w \rangle \in L_u \Leftrightarrow \langle M' \rangle \in M_{\mathcal{P}}$: (lembrar que $L = L(M_L) \in \mathcal{P}$)

1. M' simula a Máquina Universal U com a entrada $\langle M, w \rangle$;
2. Se M não aceita w (ou seja, se $\langle M, w \rangle \notin L_u$), então M' não faz nada. Portanto, M' não aceita a sua entrada, qualquer que seja ela; logo, $L(M') = \emptyset$; como $\emptyset \notin \mathcal{P}$, então $\langle M' \rangle \notin M_{\mathcal{P}}$;
3. Se M aceita w, então M' simula M_L com a sua entrada original, qualquer que seja ela; logo, $L(M') = L$; como $L \in \mathcal{P}$, então $\langle M' \rangle \in M_{\mathcal{P}}$;

Observar que todas as sentenças de L_u reduzem para uma mesma sentença $\langle M' \rangle$ (que aceita M_L) de $M_{\mathcal{P}}$, e também que todas as cadeias que não pertencem à L_u reduzem para a mesma cadeia $\langle M' \rangle$ (que aceita $\emptyset$) que não pertence à $M_{\mathcal{P}}$.

Conclusão

A demonstração do teorema considerou que a linguagem vazia ($\emptyset$) não pertence à $\mathcal{P}$;
E se a linguagem vazia ($\emptyset$) pertencer à $\mathcal{P}$?

- Considerar $\overline{\mathcal{P}}$;
- Dessa maneira, $\emptyset \notin \overline{\mathcal{P}}$;
- Considerar $M_{\overline{\mathcal{P}}}$;
- Aplicar os mesmos passos da demonstração do teorema para $M_{\overline{\mathcal{P}}}$;
- Conclui-se que $M_{\overline{\mathcal{P}}}$ não é recursiva;
- Observar que $M_{\overline{\mathcal{P}}} = \overline{M_{\mathcal{P}}}$;
- Se $\overline{M_{\mathcal{P}}}$ não é recursiva, então $M_{\mathcal{P}}$ não é recursiva, pois o complemento de uma linguagem recursiva é também uma linguagem recursiva;
- Portanto $M_{\mathcal{P}}$ não é recursiva da mesma forma.

Exemplo

O problema de determinar se a linguagem aceita por uma Máquina de Turing é livre de contexto é indecidível.

- Pelo Teorema de Rice, é suficiente provar que "ser livre de contexto" é uma propriedade não-trivial das linguagens recursivamente enumeráveis;
- Ou seja, basta apresentar duas linguagens RE, uma que seja livre de contexto e outra que não seja;
- A linguagem $\{a^i b^i c^i | i \geq 0\}$ é RE mas não é livre de contexto;
- A linguagem $\{a^i b^i | i \geq 0\}$ é RE e livre de contexto.

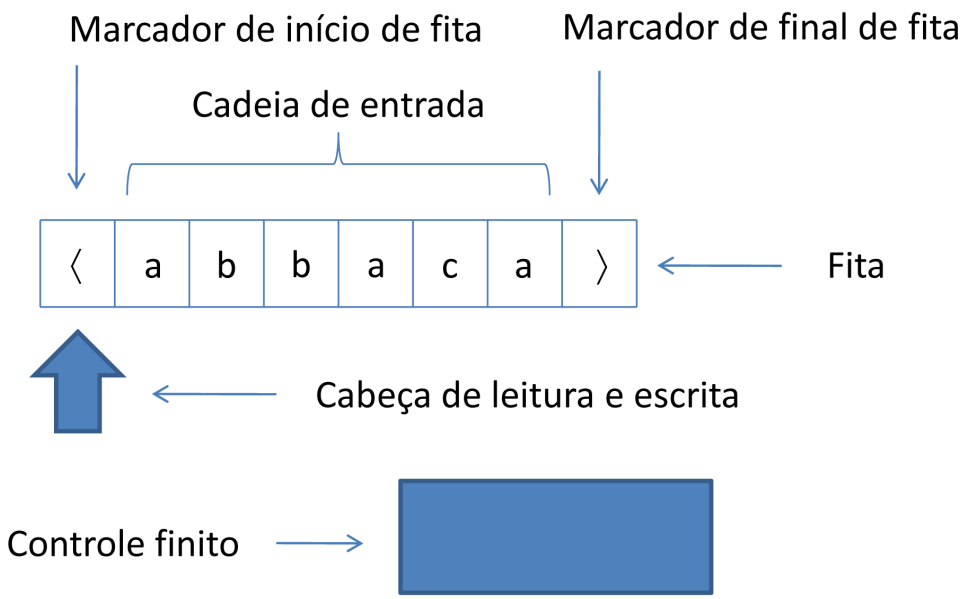
E se $\mathcal{P}$ for trivial?

Então $\mathcal{P}$ é decidida por uma MT que sempre aceita (se $\mathcal{P}$ contém todas as linguagens) ou sempre rejeita (se $\mathcal{P} = \emptyset$). O teorema, nesses casos, não pode ser aplicado:

- $\mathcal{P}$ contém todas as linguagens $\Rightarrow$ o passo 2 da prova do teorema não é verificado;
- $\mathcal{P} = \emptyset \Rightarrow$ o passo 3 da prova do teorema não é verificado;

Conceito

Um Autômato Linearmente Limitado (ALL), também conhecido como Máquina de Turing com Fita Limitada, é uma Máquina de Turing na qual o tamanho da fita de entrada é limitada ao comprimento da cadeia a ser analisada.



Formalização

Um Autômato Linearmente Limitado (ALL) é uma 8-upla:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \langle, \rangle, F)$$

onde:

- Q é o conjunto de estados;
- Σ é o alfabeto de entrada;
- Γ é o alfabeto de símbolos que podem ser lidos e/ou escritos na fita, $\Sigma \subseteq \Gamma$;
- δ é a função de transição;
- $\langle$ e $\rangle$ são os símbolos que delimitam a cadeia de entrada na fita, $\langle \notin \Gamma, \rangle \notin \Gamma$;
- F é o conjunto de estados finais.

O ALL não pode se movimentar para à direita do símbolo $\rangle$ nem para a esquerda do símbolo $\langle$ e nem pode substituí-los por outros símbolos.

Observações

- Um ALL é um caso particular de MT em que a movimentação da cabeça de leitura/escrita é limitada ao trecho da fita que contém a cadeia de entrada a ser analisada;
- A quantidade de memória de trabalho disponível depende do alfabeto Γ e cresce linearmente com o comprimento da cadeia de entrada (por isso o nome "Linearmente Limitado");
- Um ALL pode ser determinístico ou não-determinístico;
- Demonstra-se que a classe das linguagens reconhecidas pelos ALL não-determinísticos coincide com a classe das linguagens geradas pelas gramáticas sensíveis ao contexto (a menos da cadeia vazia);
- Não se sabe se ALLs não-determinísticos reconhecem a mesma classe de linguagens que os ALL determinísticos;
- Em qualquer caso, a quantidade de configurações distintas de um ALL para uma certa entrada é sempre finita.

Aplicações

Apesar da limitação da fita de entrada (e conseqüentemente da sua memória), ALLs são bastante poderosos:

- Eles são modelos bastante próximos dos computadores reais modernos;
- Eles são capazes de decidir $A_{AFD}, A_{GLC}, V_{AFD}$ e V_{GLC};
- Eles reconhecem uma classe de linguagens mais ampla do que os autômatos de pilha (que por sua vez necessitam de uma memória infinita na forma de pilha) - a classe das linguagens sensíveis ao contexto ou tipo 1;
- Ainda assim, existem problemas que não podem ser decididos por ALLs (qualquer problema que seja representado por uma linguagem que não seja do tipo 1);
- Além disso, também existem problemas sobre ALLs que são indecidíveis. Um exemplo é V_{ALL}, que será apresentado mais adiante.

Quantidade máxima de configurações

Lema: Seja M um ALL (determinístico ou não-determinístico) com $|Q|$ estados, $|\Gamma|$ símbolos no seu alfabeto de fita e uma cadeia de entrada $w, |w| = n$. Então existem exatamente $|Q| * (n + 2) * |\Gamma|^n$ configurações distintas para M.

Prova:

1. A configuração é uma tripla composta por estado, posição da cabeça de leitura/escrita na fita e conteúdo da fita;
2. M possui $|Q|$ estados distintos;
3. A cabeça de leitura/escrita pode se encontrar em $n + 2$ posições distintas;
4. Existem $|\Gamma|^n$ combinações diferentes de conteúdo para a fita de entrada;
5. Portanto, existem $|Q| * (n + 2) * |\Gamma|^n$ configurações distintas para M.

Quantidade máxima de configurações

Exemplo

Seja M um ALL com a cadeia de entrada $aabbcc$ e:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$;
- $\Gamma = \{a, b, c, X\}$;

Então existem exatamente $3 * (6 + 2) * 4^6$ configurações distintas para M:

- 3 estados possíveis;
- $6 + 2$ posições distintas para a cabeca de leitura/escrita;
- 4^6 cadeias distintas sobre a fita de entrada.

Repetição de configurações

Lema: Seja M um ALL determinístico. Se M assumir a mesma configuração mais de uma vez durante a análise de uma cadeia, então ele está em loop.

Prova:

1. Suponha que a sequência de movimentações é $...C_iC_{i+1}C_{i+2}...C_kC_{k+1}C_{k+2}...$ e que $C_i = C_k$;
2. Então, o conteúdo da fita de entrada, a posição do cursor de leitura/escrita e o estado corrente são idênticos;
3. Como o ALL é determinístico, e como ele se movimenta da configuração C_i para a configuração C_{i+1}, então é certo que o mesmo acontecerá com C_k, e portanto $C_{i+1} = C_{k+1}$;
4. Além disso, como C_i leva até C_k, então é fato que C_k conduzirá o ALL até uma outra configuração, que também será idêntica à C_i;
5. Este ciclo se repete por um número indeterminado de vezes e portanto o ALL está em loop.

Repetição de configurações

Corolário: Seja M um ALL determinístico. Se M assume, durante o reconhecimento de uma determinada cadeia de entrada, uma quantidade de configurações que é idêntica à quantidade total de configurações distintas que ele possui para esta cadeia, então ele está em loop.
Prova:

1. Suponha que a quantidade de configurações distintas que ele possui para uma certa cadeia de entrada seja n;
2. Suponha que, durante o reconhecimento desta cadeia, ele já passou por n configurações;
3. Portanto, a próxima configuração que ele irá assumir será a de número $n + 1$;
4. Como o ALL possui apenas n configurações distintas, é certo que, dentre estas $n + 1$ configurações, duas deverão ser repetidas;
5. Logo, pelo lema anterior, o ALL está em loop com a cadeia de entrada.

Problema A_{ALL}

Aceitação em Autômatos Linearmente Limitados Determinísticos:

$$A_{ALL} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ é um } ALL \text{ determinístico que aceita a cadeia } w\}$$

Teorema: A_{ALL} é uma linguagem decidível.
Prova:

1. Suponha que o ALL seja $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \langle, \rangle, F)$;
2. Suponha $|w| = n$;
3. Construir M' que simula M com a entrada w:
   - Simular até que M pare ou até que tenham sido executadas $|Q| * (n+2) * |\Gamma|^n - 1$ movimentações;
   - Se M pára e aceita, então M' pára e aceita;
   - Se M pára e rejeita, então M' pára e rejeita;
   - Se M não parou, então M' rejeita (veja corolário anterior).

Problema A_{ALL}

- A quantidade máxima de configurações distintas que o ALL determinístico pode assumir é conhecida e essa informação é usada para detectar loops.

	MT	ALL
Fita de entrada	Ilimitada	Limitada
Quantidade de configurações para uma mesma entrada	Infinita	Finita
Problema da aceitação	L_u	A_{ALL}
Problema da aceitação	Indecidível	Decidível

História de computação

Uma "história de computação" de uma MT M sobre uma cadeia de entrada w é a seqüência de configurações $C_1C_2...C_n$ que M assume durante a análise de w.

- Se $w \in L(M) = ACEITA(M)$ então $C_1C_2...C_n$ é uma "história de computação de aceitação" onde C_1 é a configuração inicial, C_n é configuração final de aceitação e C_i segue de forma legítima C_{i-1}, para $1 < i \leq n$;
- Se $w \in REJEITA(M)$ então $C_1C_2...C_n$ é uma "história de computação de rejeição" onde C_1 é a configuração inicial, C_n é configuração final de rejeição e C_i segue de forma legítima C_{i-1}, para $1 < i \leq n$;
- Se $w \in LOOP(M)$ então $C_1C_2...C_n...$ é uma seqüência infinita de configurações.

História de computação

Sejam M e w:

- Se M é determinística, então existe uma única história de computação (de aceitação, de rejeição ou de loop) para w;
- Se M é não-determinística, então podem existir várias histórias de computação para w (finitas ou infinitas).

Problemas indecidíveis

Provaremos a seguir que os dois problemas abaixo são indecidíveis:

- $V_{ALL} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ é um } ALL \text{ e } L(M) = \emptyset\}$;
- $TODAS_{GLC} = \{\langle G \rangle \mid G \text{ é uma } GLC \text{ e } L(G) = \Sigma^*\}$.

A prova, em ambos os casos, será por redução a partir de L_u e com o emprego de histórias de computação.

Problema V_{ALL}

Vacuidade da linguagem aceita por um Autômato Linearmente Limitado:

$$V_{ALL} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ é um } ALL \text{ e } L(M) = \emptyset\}$$

Teorema: V_{ALL} é uma linguagem indecidível.
Prova:

- Suponha que V_{ALL} é decidível;
- Logo, $\overline{V_{ALL}}$ também é decidível;
- Fazer uma redução de L_u para $\overline{V_{ALL}}$ usando histórias de computação;
- Se $\overline{V_{ALL}}$ fosse decidível, então L_u também seria;
- Como L_u não é decidível, segue que a hipótese é falsa, $\overline{V_{ALL}}$ não é decidível e V_{ALL} não é decidível.

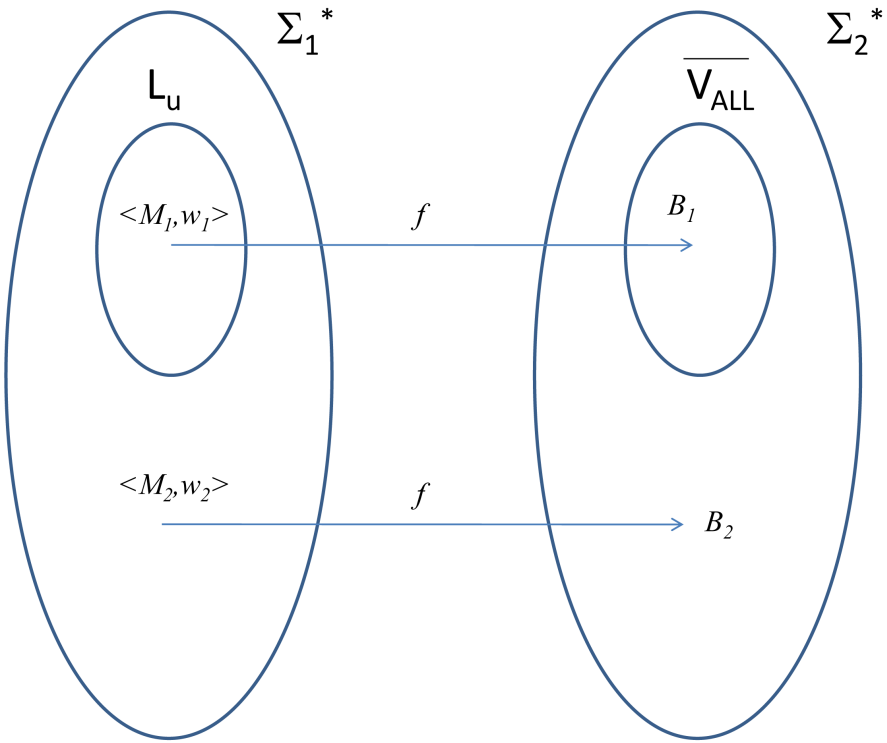
Problema V_{ALL}

Redução de L_u para $\overline{V_{ALL}}$:

- Construir um ALL B a partir de $\langle M, w \rangle$ tal que: $\langle M, w \rangle \in L_u \Leftrightarrow \langle B \rangle \in \overline{V_{ALL}}$
- O ALL B é construído de forma que $L(B)$ compreende todas as histórias de computação de aceitação de M para w;
- Se M rejeita w, ou seja, se $\langle M, w \rangle \notin L_u$, então $L(B) = \emptyset$ e $\langle B \rangle \notin \overline{V_{ALL}}$;
- Se M aceita w, ou seja, se $\langle M, w \rangle \in L_u$, então $L(B) \neq \emptyset$ e $\langle B \rangle \in \overline{V_{ALL}}$.

Problema V_{ALL}

- M_1 aceita $w_1 \Rightarrow \langle M_1, w_1 \rangle \in L_u \Rightarrow L(B_1) \neq \emptyset \Rightarrow \langle B_1 \rangle \in \overline{V_{ALL}}$;
- M_2 não aceita $w_2 \Rightarrow \langle M_2, w_2 \rangle \notin L_u \Rightarrow L(B_2) = \emptyset \Rightarrow \langle B_2 \rangle \notin \overline{V_{ALL}}$;



Problema V_{ALL}

Construção de B a partir de $\langle M, w \rangle$:

1. Suponha que a entrada para B é $C_1 \# C_2 \# ... \# C_n$;
2. As três condições seguintes devem ser válidas;
3. B verifica se C_1 é uma configuração inicial válida para M com a cadeia w:
   $C_1 = q_0 w$ pode ser verificado conhecendo-se M e w;
4. B verifica se C_i segue de forma legítima C_{i-1}, para $1 < i \leq n$:
   C_i deve corresponder à combinação da configuração C_{i-1} com a aplicação de uma transição de M;
5. B verifica se C_n é uma configuração de aceitação para M:
   $C_n = \alpha q_f \beta$ pode ser verificado conhecendo-se M.

Problema V_{ALL}

Examinando por outro ângulo:

- Deseja-se determinar se $\langle M, w \rangle \in L_u$;
- Suponha que V_{ALL} é decidível por uma MT R;
- A partir de $\langle M, w \rangle$ obter o ALL B conforme descrito;
- Executar R com a entrada $\langle B \rangle$;
- Se R aceita, isso significa que $L(B)$ é vazia e portanto que $w \notin L(M)$, ou seja, $\langle M, w \rangle \notin L_u$;
- Se R rejeita, isso significa que $L(B)$ é não-vazia e portanto que $w \in L(M)$, ou seja, $\langle M, w \rangle \in L_u$;
- Logo, seria possível decidir L_u;
- Mas isso é uma contradição e portanto V_{ALL} não é decidível;

Observar que L_e está para as MTs assim como V_{ALL} está para os ALLs, e que ambos são indecidíveis (ao contrário de L_u e V_{ALL}).

Problema $TODAS_{GLC}$

Totalidade da linguagem gerada por uma gramática livre de contexto:

$$TODAS_{GLC} = \{\langle G \rangle \mid G \text{ é uma } GLC \text{ e } L(G) = \Sigma^*\}$$

Teorema: $TODAS_{GLC}$ é uma linguagem indecidível.
Prova:

- Suponha que $TODAS_{GLC}$ é decidível;
- Logo, $\overline{TODAS_{GLC}}$ também é decidível;
- Fazer uma redução de L_u para $\overline{TODAS_{GLC}}$ usando histórias de computação;
- Se $\overline{TODAS_{GLC}}$ fosse decidível, então L_u também seria;
- Como L_u não é decidível, segue que a hipótese é falsa, $\overline{TODAS_{GLC}}$ não é decidível e $TODAS_{GLC}$ não é decidível.

Problema $TODAS_{GLC}$

Redução de L_u para $\overline{TODAS_{GLC}}$

- Construir uma GLC G a partir de $\langle M, w \rangle$ tal que: $\langle M, w \rangle \in L_u \Leftrightarrow \langle G \rangle \in \overline{TODAS_{GLC}}$;
- G gera cadeias sobre um alfabeto Σ;
- G gera todas as cadeias sobre Σ que não representam histórias de computação de aceitação para M com w;
  - Isto inclui todas as cadeias que não representam histórias de computação para M com w;
  - Inclui, também, todas as cadeias que representam histórias de computação que não são de aceitação para M com w;
  - G gera todas as cadeias sobre Σ se e apenas se $w \notin M$;
  - G não gera todas as cadeias sobre Σ se e apenas se $w \in M$; nesse caso, G deve falhar em gerar justamente em gerar a cadeia que representa a história de computação de aceitação para M com w;

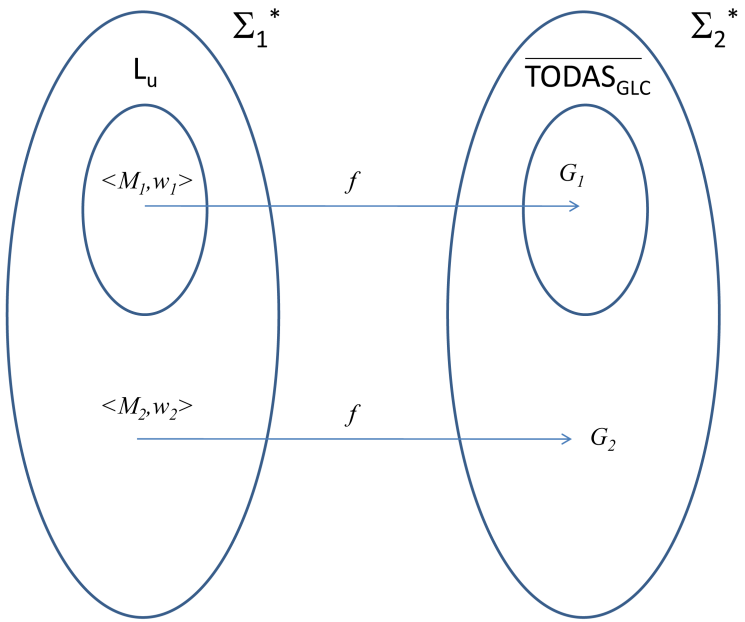
Problema $TODAS_{GLC}$

Redução de L_u para $\overline{TODAS_{GLC}}$ (resumo):

- Se M não aceita w, ou seja, se $\langle M, w\rangle \notin L_u$, então G não falha em gerar nenhuma cadeia sobre Σ, $L(G) = \Sigma^*$ e $\langle G\rangle \notin \overline{TODAS_{GLC}}$;
- Se M aceita w, ou seja, se $\langle M, w\rangle \in L_u$, então G falha em gerar a cadeia que representa a história de computação de aceitação de w em M, $L(G) \neq \Sigma^*$ e $\langle G\rangle \in \overline{TODAS_{GLC}}$.

Problema $TODAS_{GLC}$

- M_1 aceita $w_1 \Rightarrow$
  $\langle M_1, w_1 \rangle \in L_u \Rightarrow L(G_1) \neq \Sigma^* \Rightarrow \langle G_1 \rangle \in \overline{TODAS_{GLC}}$;
- M_2 não aceita $w_2 \Rightarrow$
  $\langle M_2, w_2 \rangle \notin L_u \Rightarrow L(G_2) = \Sigma^* \Rightarrow \langle G_2 \rangle \notin \overline{TODAS_{GLC}}$;



Problema $TODAS_{GLC}$

Construção de G a partir de $\langle M, w \rangle$:

1. G gera todas as cadeias sobre Σ que não representam histórias de computação (seqüências de configurações) para M com w (por exemplo, onde uma configuração possui 0 ou 2 ou mais estados, entre outras possibilidades);
2. G gera todas as cadeias que representam histórias de computação (seqüências de configurações) que não são de aceitação para M com w;
3. Histórias de computação de M com w tem o formato: $C_1 \# C_2 \# ... \# C_n$;
4. Para gerar todas as cadeias que representam histórias de computação que não são de aceitação para M com w, pelo menos uma das seguintes condições devem ser verificadas;

Problema $TODAS_{GLC}$

4. G gera todas as histórias de computação tais que C_1 não é uma configuração inicial válida para M com a cadeia w:
   Pode ser feito conhecendo-se M e w;
5. G gera todas as histórias de computação tais que C_i não segue de forma legítima C_{i-1}, para $2 \leq i \leq n$:
   Pode ser feito conhecendo-se M e w;
6. G gera todas as histórias de computação tais que C_n não é uma configuração de aceitação para M:
   Pode ser feito conhecendo-se M.

Problema $TODAS_{GLC}$

Construção de G a partir de $\langle M, w \rangle$:

- Para a linguagem especificada anteriormente, projetar um autômato de pilha não-determinístico (APN) é mais fácil do que projetar a gramática diretamente;
- Para obter G, iremos inicialmente obter um APN D que aceita $L(G)$;
- Finalmente, o APN D pode ser convertido para uma GLC G.

Problema $TODAS_{GLC}$

Construção do APN D a partir de $\langle M, w \rangle$:

1. A cadeia de entrada para D é uma cadeia sobre o alfabeto Σ;
2. Se a cadeia de entrada não representa uma história de computação, então D pára e aceita;
3. Senão, D seleciona, de forma não-determinística, qual das três condições ele irá testar;
4. No primeiro ramo, D aceita se C_1 não é uma configuração inicial válida para M com a cadeia w; caso contrário, rejeita;
5. No segundo ramo, D seleciona não-determinísticamente um par de configurações C_i e C_{i-1} (com $2 \leq i \leq n$) para analisar:
   - D aceita se C_i não segue de forma legítima C_{i-1}; caso contrário, rejeita;
6. No terceiro ramo, D aceita se C_n não é uma configuração de aceitação para M; caso contrário, rejeita.

Problema $TODAS_{GLC}$

Observações:

- No segundo ramo, D empilha a configuração C_{i-1} e depois compara com a configuração C_i;
- Para que isso seja possível, será necessário que as configurações de ordem par sejam escritas na cadeia de entrada de forma revertida;
- $C_1 \# C_2^R \# C_3 \# C_4^R \# \ldots$

Problema $TODAS_{GLC}$

Conclusões:

- D rejeita a cadeia que representa a história de computação de aceitação para M com w (se esta existir); corresponde ao caso em que todos os ramos da execução não-determinística rejeitam a entrada;
- D aceita todas as cadeias que não representam histórias de computação para M com w;
- D aceita todas as história de computação que não são de aceitação para M com w;
- Se $w \notin L(M)$, então $L(D) = L(G) = \Sigma^*$, ou seja, $G \notin \overline{TODAS_{GLC}}$;
- Se $w \in L(M)$, então $L(D) = L(G) \neq \Sigma^*$, ou seja, $G \in \overline{TODAS_{GLC}}$;
- A existência de D prova a existência de G, e, conseqüentemente, a existência de uma redução de L_u para $\overline{TODAS_{GLC}}$. Logo, $\overline{TODAS_{GLC}}$ e $TODAS_{GLC}$ são indecidíveis.

Origem e natureza

"Post´s Correspondence Problem" (Problema da Correspondência de Post)

- Problema que não está relacionado com Máquinas de Turing ou as linguagens por elas aceitas;
- Problema combinatorial que envolve a manipulação (emparelhamento) de cadeias de caracteres;
- Demonstra-se ser indecidível;
- A indecidibilidade o PCP foi provada por Post em 1946;
- É usado para demonstrar a indecidibilidade de vários outros problemas.

Definição

Uma "instância" PCP consiste de duas listas A e B de cadeias formadas sobre um mesmo alfabeto Σ. As duas listas devem ter o mesmo comprimento.

- $A = w_1, w_2, ..., w_k$;
- $B = x_1, x_2, ..., x_k$;
- Para um certo valor de i, diz-se que o par (w_i, x_i) é um par que está em correspondência;
- Pares em correspondência podem ser considerados como peças de um dominó:

$$\left[\frac{w_1}{x_1}\right], \left[\frac{w_2}{x_2}\right], ..., \left[\frac{w_k}{x_k}\right]$$

Solução

Diz-se que uma instância PCP tem uma solução se existir uma seqüência de um ou mais números inteiros (repetições permitidas) $i_1, i_2, ..., i_m$, os quais, quando interpretados como índices de cadeias nas listas A e B, produzem como resultado a mesma cadeia.

- $A = w_1, w_2, ..., w_k$;
- $B = x_1, x_2, ..., x_k$;
- Diz-se que $i_1, i_2, ..., i_m, m \geq 1$, é uma solução para esta instância PCP se $w_{i_1} w_{i_2} ... w_{i_m} = x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_m}$

Solução

PCP como um tipo de jogo de dominó:

- Composto por uma quantidade finita de peças:

$$\left[\frac{w_1}{x_1}\right], \left[\frac{w_2}{x_2}\right], ..., \left[\frac{w_k}{x_k}\right]$$

- Peças são combinadas para formar cadeias idênticas na parte de cima e na parte de baixo;
- Peças podem ser duplicadas para formar cadeias:

$$\left[\frac{w_{i_1}}{x_{i_1}}\right] \left[\frac{w_{i_2}}{x_{i_2}}\right] ... \left[\frac{w_{i_m}}{x_{i_m}}\right]$$

Exemplo

Seja $\Sigma = \{0, 1\}$ e suponha que as listas A e B sejam as seguintes:

	Lista A	Lista B
i	w_i	x_i
1	1	111
2	10111	10
3	10	0

- Uma solução para essa instância é a seqüência:
  $i_1 = 2, i_2 = 1, i_3 = 1, i_4 = 3$, ou simplesmente $2, 1, 1, 3$, pois
  $w_2 w_1 w_1 w_3 = \underbrace{10111}_{w_2}\underbrace{1}_{w_1}\underbrace{1}_{w_1}\underbrace{10}_{w_3} =$
  $x_2 x_1 x_1 x_3 = \underbrace{10}_{x_2}\underbrace{111}_{x_1}\underbrace{111}_{x_1}\underbrace{0}_{x_3} = 101111110;$
- Entre outras, $2, 1, 1, 3, 2, 1, 1, 3$ também é solução.

Exemplo

Continuação

- Representação da solução $2, 1, 1, 3$ na forma de dominós:

$$\underbrace{\left[\frac{10111}{10}\right]}_{x_2}\underbrace{\left[\frac{1}{111}\right]}_{x_1}\underbrace{\left[\frac{1}{111}\right]}_{x_1}\underbrace{\left[\frac{10}{0}\right]}_{x_3}$$

$w_2 \quad w_1 \quad w_1 \quad w_3$

Exemplo

Seja $\Sigma = \{a, b, c\}$ e suponha que as listas A e B sejam as seguintes:

	Lista A	Lista B
i	w_i	x_i
1	abc	ab
2	ca	a
3	acc	ba

- Essa instância não possui solução, pois $|w_i| > |x_i|, \forall i$.

Exemplo

Seja $\Sigma = \{0, 1\}$ e suponha que as listas A e B sejam as seguintes:

	Lista A	Lista B
i	w_i	x_i
1	10	101
2	011	11
3	101	011

- Essa instância também não possui solução:
- Se $i_1 = 2$, então $A = 011...$, $B = 11...$ e não é possível gerar uma solução;
- Se $i_1 = 3$, então $A = 101...$, $B = 011...$ e não é possível gerar uma solução;

Exemplo

Continuação

- Com $i_1 = 1$, então $A = 10...$, $B = 101...$ talvez seja possível obter uma solução;
- Se $i_2 = 1$, então $A = 1010...$, $B = 101101...$ e não é possível gerar uma solução;
- Se $i_2 = 2$, então $A = 10011...$, $B = 10111...$ e não é possível gerar uma solução;
- Com $i_2 = 3$, então $A = 10101...$, $B = 101011...$ talvez seja possível obter uma solução;
- No entanto, o mesmo raciocínio leva à escolha de $i_3 = 3$, e assim por diante, e não é possível nunca gerar uma solução.

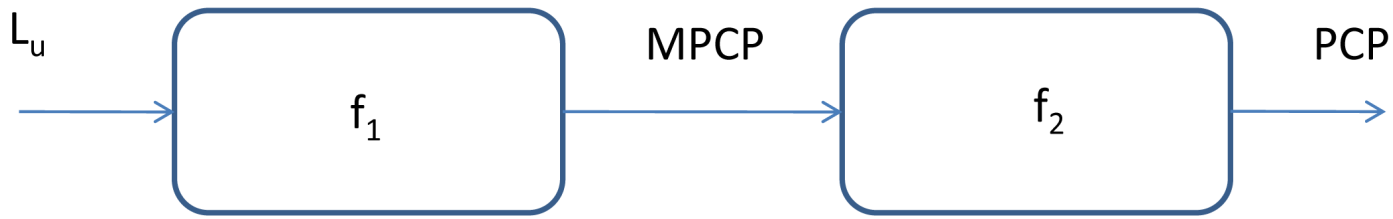
Problema

Dada uma instância PCP sobre um certo alfabeto Σ, determinar se ela possui uma solução.

- $PCP = \{\langle P \rangle \mid P$ é uma instância PCP com uma solução$\}$;
- PCP é indecidível.

Estratégia da demonstração

1. Reduzir L_u para uma versão modificada do PCP (MPCP);
2. Reduzir MPCP para PCP;
3. Como L_u é indecidível, MPCP e PCP são também indecidíveis.



Definição

"Modified Post Corresponde Problem" (Problema da Correspondência de Posto Modificado):

- Uma instância MPCP é definida da mesma forma que uma instância PCP;
- A solução, no entanto, deve obrigatoriamente iniciar com o par 1;
- $A = w_1, w_2, ..., w_k$;
- $B = x_1, x_2, ..., x_k$;
- Diz-se que $i_1, i_2, ..., i_m, m \geq 0$, é uma solução para esta instância MPCP se $w_1 w_{i_1} w_{i_2} ... w_{i_m} = x_1 x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_m}$

Exemplo

Seja $\Sigma = \{0, 1\}$ e suponha que as listas A e B sejam as seguintes:

	Lista A	Lista B
i	w_i	x_i
1	1	111
2	10111	10
3	10	0

- Considerada como instância PCP, há solução;
- Considerada como instância MPCP, não há solução.

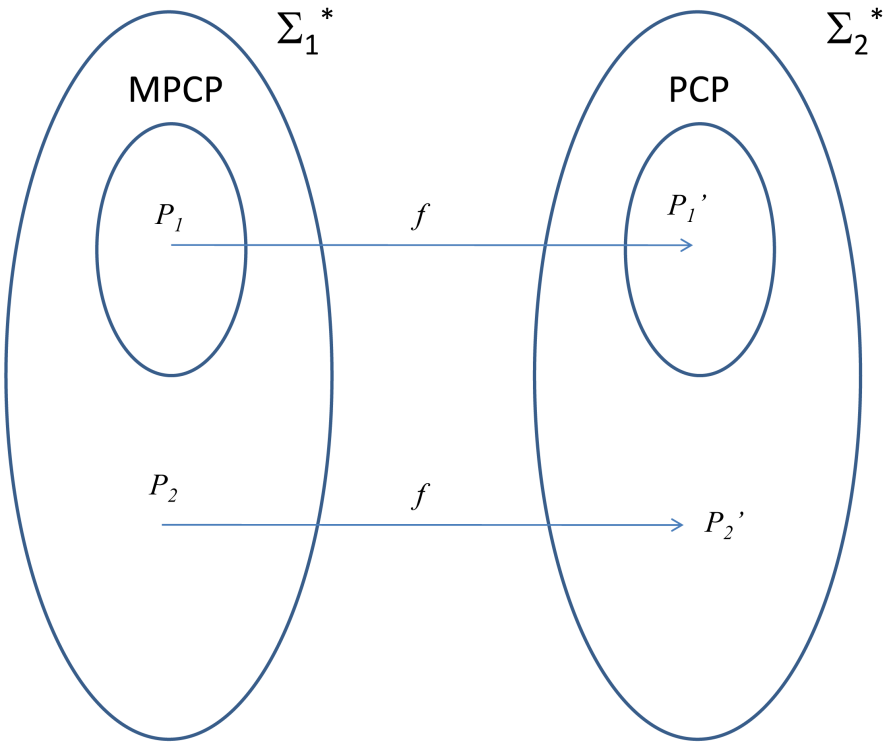
Exemplo

Continuação

- $A = w_1... = 1...$, $B = x_1... = 111...$
- Se $i_1 = 2$, então $A = 110111...$, $B = 11110...$ e não há solução possível;
- Se $i_1 = 3$, então $A = 110...$, $B = 1110...$ e não há solução possível;
- Se $i_1 = 1$, então $A = 11...$, $B = 111111...$ e não há solução possível, pois as cadeias nunca terão o mesmo tamanho.

Redução de MPCP para PCP

P_1 é uma instância MPCP com solução $\Leftrightarrow$ P_1' é uma instância PCP com solução.



Redução de MPCP para PCP

A obtenção de $P_1'(P_2')$ (PCP) a partir de $P_1(P_2)$ (MPCP) pode ser feita da seguinte forma:

- MPCP=(A, B) sobre Σ;
- Suponha $A = w_1, w_2, ..., w_k$;
- Suponha$B = x_1, x_2, ..., x_k$;
- Suponha que $* \notin \Sigma, \$ \notin \Sigma$;
- PCP=(C, D) sobre $\Sigma \cup \{*, \$\}$;
- $C = y_0, y_1, y_2, ..., y_k, y_{k+1}$;
- $D = z_0, z_1, z_2, ..., z_k, z_{k+1}$;

Redução de MPCP para PCP

- $\forall i, 1 \leq i \leq k$, y_i é obtido a partir de w_i pela inserção do símbolo $*$ após cada símbolo de w_i
- $\forall i, 1 \leq i \leq k$, z_i é obtido a partir de x_i pela inserção do símbolo $*$ antes cada símbolo de x_i
- $y_0 = *y_1$
- $z_0 = z_1$
- $y_{k+1} = \$$
- $z_{k+1} = *\$$

Exemplo

Suponha a instância MPCP:

	Lista A	Lista B
i	w_i	x_i
1	1	111
2	10111	10
3	10	0

A aplicação da construção anterior resulta na instância PCP:

	Lista C	Lista D
i	y_i	z_i
0	*1*	*1*1*1
1	1*	*1*1*1
2	1*0*1*1*1*	*1*0
3	1*0*	*0
4	$	*$

Redução de MPCP para PCP

Para provar que a construção proposta é uma redução, é necessário (suponha que P_1 reduz para P_1'):

1. Provar que se P_1 é uma instância MPCP com solução, então P_1' é uma instância PCP com solução;
2. Provar que se P_1' é uma instância PCP com solução, então P_1 é uma instância MPCP com solução.

Estratégias de prova

- Método alternativo para provar que se trata de uma redução:
  $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow \Big((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)\Big)$
- Ele contrasta com o método usado até então:
  $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow \Big((A \rightarrow B) \wedge (\sim A \rightarrow \sim B)\Big)$
- No entanto, é possível provar a equivalência dos dois métodos:
  $\Big((A \rightarrow B) \wedge (\sim A \rightarrow \sim B)\Big) \leftrightarrow \Big((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)\Big)$

onde:

- Na redução f de P_1 para P_1';
- $A \equiv w \in P_1$;
- $B \equiv f(w) \in P_1'$

Redução de MPCP para PCP

Se P_1 é uma instância MPCP com solução, então P_1' é uma instância PCP com solução:

- Suponha que a solução de P_1 seja $i_1, i_2, ..., i_m$;
- Portanto, $w_1 w_{i_1} w_{i_2} ... w_{i_m} = x_1 x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_m}$;
- Considerar $y_1 y_{i_1} y_{i_2} ... y_{i_m}$ e $z_1 z_{i_1} z_{i_2} ... z_{i_m}$;
- As duas cadeias são idênticas, exceto pelo primeiro símbolo da primeira cadeia e pelo último símbolo da segunda cadeia;
- Ou seja, $*y_1 y_{i_1} y_{i_2} ... y_{i_m} = z_1 z_{i_1} z_{i_2} ... z_{i_m} *$;
- Mas esse resultado pode ser obtido substituindo-se o primeiro par (de 1 por 0) e acrescentando-se um novo par no final $(k+1)$;
- Ou seja, $y_0 y_{i_1} y_{i_2} ... y_{i_m} y_{k+1} = z_0 z_{i_1} z_{i_2} ... z_{i_m} z_{k+1}$;
- Logo, $0, i_1, i_2, ..., i_m, k+1$ é uma solução de P_1'.

Redução de MPCP para PCP

Se P_1' é uma instância PCP com solução, então P_1 é uma instância MPCP com solução:

- A solução de P_1' deve começar com o par 0 e terminar com o par $k+1$, pois apenas o par 0 inicia com o mesmo símbolo $(*)$ e apenas o par $k+1$ termina com o mesmo símbolo $(\$)$;
- Portanto, a solução de P_1' é $0, i_1, i_2, ..., i_m, k+1$;
- Logo, $y_0 y_{i_1} y_{i_2} ... y_{i_m} y_{k+1} = z_0 z_{i_1} z_{i_2} ... z_{i_m} z_{k+1}$;
- Se forem removidos todos os símbolos $*$ e $\$$ de ambas as cadeias, resulta:
- $w_1 w_{i_1} w_{i_2} ... w_{i_m} = x_1 x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_m}$;
- Ou seja, $1, i_1, i_2, ..., i_m$ é solução para P_1.

Redução de MPCP para PCP

Conclusões até o momento:

- Se PCP for decidível, então MPCP também será decidível;
- Se MPCP for indecidível, então PCP também será indecidível.

Exemplo

Suponha a instância MPCP:

	Lista A	Lista B
i	w_i	x_i
1	ab	abb
2	bab	ba
3	ba	a
4	a	ba

Exemplo

Continuação

A aplicação da construção anterior resulta na instância PCP:

	Lista C	Lista D
i	y_i	z_i
0	*a*b*	*a*b*b
1	a*b*	*a*b*b
2	b*a*b*	*b*a
3	b*a*	*a
4	a*	*b*a
5	$	*$

Exemplo

Continuação

- Uma solução para a instância MPCP é $3, 2, 4$;
- $y_1 y_3 y_2 y_4 = \underbrace{a*b*}_{y_1}\underbrace{b*a*}_{y_3}\underbrace{b*a*b*}_{y_2}\underbrace{a*}_{y_4}$
- $z_1 z_3 z_2 z_4 = \underbrace{*a*b*b}_{z_1}\underbrace{*a}_{z_3}\underbrace{*b*a}_{z_2}\underbrace{*b*a}_{z_4}$
- Substituir o par 1 pelo par 0 no início e acrescentar o par 5 no final;
- $y_0 y_3 y_2 y_4 y_5 = \underbrace{*a*b*}_{y_0}\underbrace{b*a*}_{y_3}\underbrace{b*a*b*}_{y_2}\underbrace{a*}_{y_4}\underbrace{\$}_{y_5}$
- $z_0 z_3 z_2 z_4 z_5 = \underbrace{*a*b*b}_{z_0}\underbrace{*a}_{z_3}\underbrace{*b*a}_{z_2}\underbrace{*b*a}_{z_4}\underbrace{*\$}_{z_5}$
- Portanto, $0, 3, 2, 4, 5$ é uma solução para o PCP correspondente.

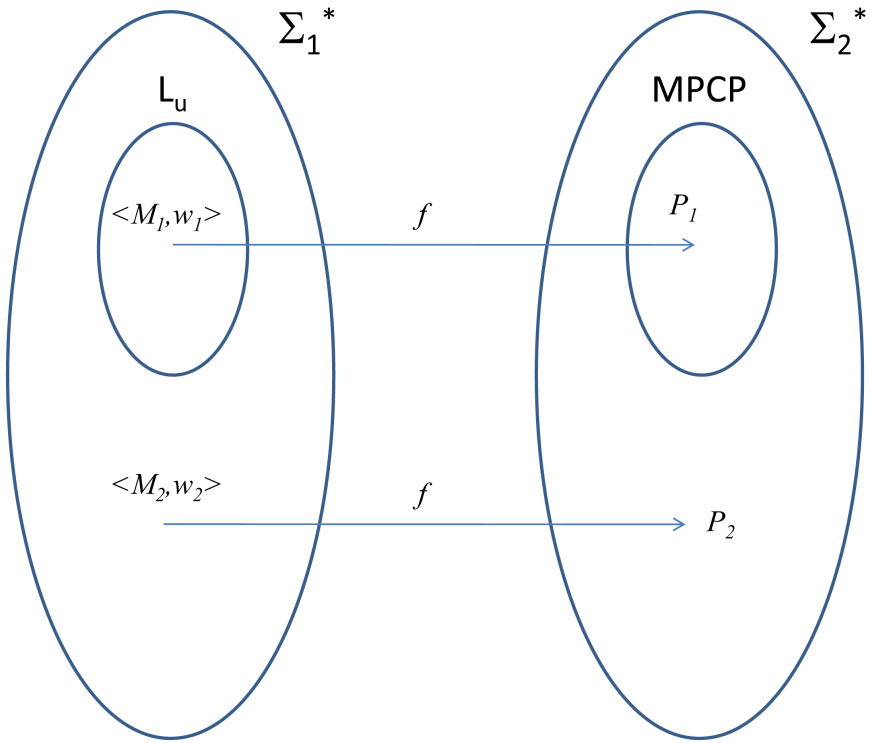
Exemplo

Continuação

- Uma solução para a instância PCP é $0, 3, 5$;
- $y_0y_3y_5 = \underbrace{*a*b*}_{y_0}\underbrace{b*a*}_{y_3}\underbrace{\$}_{y_5} = z_0z_3z_5 = \underbrace{*a*b*b}_{z_0}\underbrace{*a}_{z_3}\underbrace{*\$}_{z_5}$
- Remover todos os símbolos $*$ e $\$$ de ambas as cadeias;
- O resultado é $w_1w_3 = \underbrace{ab}_{w_1}\underbrace{ba}_{w_3} = x_1x_3 = \underbrace{abb}_{x_1}\underbrace{a}_{x_3}$
- Logo, $1, 3$ é uma solução para o MPCP correspondente.

Redução de L_u para MPCP

$\langle M_1, w_1 \rangle \in L_u \Leftrightarrow P_1$ é uma instância MPCP com solução.



Redução de L_u para MPCP

A obtenção de P a partir de $\langle M, w \rangle$ pode ser feita da seguinte forma:

- As listas A e B representam a história de computação de M com w;
- Soluções parciais para P representam histórias de computação incompletas para w em M;
- Se $w \in L(M)$, ou seja, se $\langle M, w \rangle \in L_u$, então é possível gerar uma solução para P;
- Se $w \notin L(M)$, ou seja, se $\langle M, w \rangle \notin L_u$, então não há solução possível para P;
- A construção da lista A está sempre uma configuração "atrasada" em relação à construção da lista B;
- As listas coincidem se e apenas se M entra num estado final.

Redução de L_u para MPCP

Premissa

Seja $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ e suponha que:

1. M não grava brancos na fita;
2. M não se desloca para à esquerda da posição inicial da fita.

Nesse caso, é possível afirmar que:

- As configurações de M tem o formato geral $\alpha q \beta$, com $q \in Q, \alpha \in \Gamma^*$ e $\beta \in \Gamma^*$, ou seja, α e β são compostos apenas por símbolos diferentes de B;
- As cadeias α e β representam as posições da fita inicialmente ocupadas pela cadeia de entrada w, além de eventuais posições visitadas à direita da mesma.

Redução de L_u para MPCP

Passo 1:

- O primeiro par da instância MPCP é:

	Lista A	Lista B
1	$\#$	$\#q_0w\#$

- Ele será usado para iniciar a solução, caso exista;
- Notar que a lista B está uma configuração adiantada em relação à lista A.

Redução de L_u para MPCP

Passo 2:

- Novos pares são criados a partir de δ, com o objetivo de reproduzir a história de computação de w em M;
- $\forall q_i \in Q - F, q_j \in Q, x, y, z \in \Gamma$, acrescentar os pares:

Lista A	Lista B	
$q_i x$	$y q_j$	se $\delta(q_i, x) = (q_j, y, R)$
$z q_i x$	$q_j z y$	se $\delta(q_i, x) = (q_j, y, L)$
$q_i \#$	$y q_j \#$	se $\delta(q_i, B) = (q_j, y, R)$
$z q_i \#$	$q_j z y \#$	se $\delta(q_i, B) = (q_j, y, L)$

- Para cada transição possível de ser aplicada numa certa configuração de M, há um par correspondente em P;
- Um par para cada transição com deslocamento à direita; $|\Gamma|$ pares para cada transição com deslocamento à esquerda;
- A lista B está uma configuração adiantada em relação à lista A.

Redução de L_u para MPCP

Passo 3:

- $\forall x \in \Gamma$, acrescentar os pares:

Lista A	Lista B
x	x
$\#$	$\#$

- Permitem a cópia de símbolos que não envolvam o estado corrente;
- Serão usados para permitir o avanço da solução até chegar numa nova configuração.

Redução de L_u para MPCP

Passo 4:

- Se um estado final foi alcançado, deve-se permitir que as cadeias se tornem idênticas;
- $\forall q_f \in F, x \in \Gamma, y \in \Gamma$, acrescentar os pares:

Lista A	Lista B
xq_fy	q_f
xq_f	q_f
q_fy	q_f

- São geradas novas cadeias que não representam configurações;
- O uso recorrente desses pares permite o "consumo" dos símbolos que se encontram à esquerda e à direita do estado q_f na última confguração.

Redução de L_u para MPCP

Passo 5:

- Todos os símbolos, a menos de q_f, foram removidos da última configuração;
- $w_1 ... w_k = \#\mu\#$
- $x_1 ... x_k = \#\mu\#q_f\#$
- Para torná-las iguais, basta acrescentar o par:

Lista A	Lista B
$q_f\#\#$	$\#$

- $w_1 ... w_k = \#\mu\#q_f\#\#$
- $x_1 ... x_k = \#\mu\#q_f\#\#$
- P tem uma solução.

Exemplo

Construção de P a partir de
$M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, \delta, q_1, B, \{q_3\})$ e $w = 01$, com δ:

q_i	$\delta(q_i, 0)$	$\delta(q_i, 1)$	$\delta(q_i, B)$
q_1	$(q_2, 1, R)$	$(q_2, 0, L)$	$(q_2, 1, L)$
q_2	$(q_3, 0, L)$	$(q_1, 0, R)$	$(q_2, 0, R)$
q_3	—	—	—

A história de computação de w em M é:

$$q_101 \vdash 1q_21 \vdash 10q_1 \vdash 1q_201 \vdash q_3101$$

Exemplo

Continuação

Passo	Lista A	Lista B	Origem
(1)	$\#$	$\#q_101\#$	
(2)	q_10	$1q_2$	$\delta(q_1, 0) = (q_2, 1, R)$
	$0q_11$	q_200	$\delta(q_1, 1) = (q_2, 0, L)$
	$1q_11$	q_210	$\delta(q_1, 1) = (q_2, 0, L)$
	$0q_1\#$	$q_201\#$	$\delta(q_1, B) = (q_2, 1, L)$
	$1q_1\#$	$q_211\#$	$\delta(q_1, B) = (q_2, 1, L)$
	$0q_20$	q_300	$\delta(q_2, 0) = (q_3, 0, L)$
	$1q_20$	q_310	$\delta(q_2, 0) = (q_3, 0, L)$
	q_21	$0q_1$	$\delta(q_2, 1) = (q_1, 0, R)$
	$q_2\#$	$0q_2\#$	$\delta(q_2, B) = (q_2, 0, R)$
(3)	0	0	
	1	1	
	$\#$	$\#$	

Exemplo

Continuação

Passo	Lista A	Lista B	Origem
(4)	$0q_30$	q_3	
	$0q_31$	q_3	
	$1q_30$	q_3	
	$1q_31$	q_3	
	$0q_3$	q_3	
	$1q_3$	q_3	
	q_30	q_3	
	q_31	q_3	
(5)	$q_3\#\#$	$\#$	

Exemplo

Continuação

- A solução para essa instância MPCP começa com o primeiro par (passo 1):

$$\begin{aligned} A &: \# \\ B &: \#q_1 01\# \end{aligned}$$

Exemplo

Continuação

- Para continuar, é necessário que o próximo par da lista A seja prefixo da cadeia $q_1 01\#$;
- O par $(q_1 0, 1 q_2)$ é selecionado (passo 2):

$$\begin{aligned} A &: \#q_1 0 \\ B &: \#q_1 01\#1q_2 \end{aligned}$$

Exemplo

Continuação

- Para continuar, é necessário copiar o restante da configuração até alcançar o estado q_2;
- Os pares $(1,1)$, $(\#,\#)$ e $(1,1)$ são selecionados (passo 3):

$$\begin{aligned} A &: \#q_1 01 \\ B &: \#q_1 01 \# 1 q_2 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &: \#q_1 01 \# \\ B &: \#q_1 01 \# 1 q_2 1 \# \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &: \#q_1 01 \# 1 \\ B &: \#q_1 01 \# 1 q_2 1 \# 1 \end{aligned}$$

Exemplo

Continuação

- Para continuar, é necessário que o próximo par da lista A seja prefixo da cadeia $q_2 1 \# 1$;
- O par $(q_2 1, 0 q_1)$ é selecionado (passo 2):

$$\begin{aligned} A &: \#q_1 01 \# 1 q_2 1 \\ B &: \#q_1 01 \# 1 q_2 1 \# 10 q_1 \end{aligned}$$

Exemplo

Continuação

- Em seguida, pode-se copiar 2 ($\#1$) ou 3 ($\#10$) símbolos antes de aplicar uma nova transição;
- No entanto, a inserção de 3 símbolos impede o desenvolvimento das cadeias, pois não existem pares na lista A que sejam prefixo de $q_1\#10$:

$$\begin{aligned} A &: \#q_1 01 \#1 q_2 1 \#10 \\ B &: \#q_1 01 \#1 q_2 1 \#10 q_1 \#10 \end{aligned}$$

Exemplo

Continuação

- Isso acontece porque a próxima movimentação de M é para a esquerda e, portanto, o símbolo à esquerda de q_1 é necessário para fazer a escolha do par correto nesse caso;
- Deve-se copiar apenas 2 símbolos ($\#$ e 1), resultando em:

$$\begin{aligned} A &: \#q_1 01 \# 1 q_2 1 \# 1 \\ B &: \#q_1 01 \# 1 q_2 1 \# 10 q_1 \# 1 \end{aligned}$$

Exemplo

Continuação

- Para continuar, é necessário que o próximo par da lista A seja prefixo da cadeia $0q_1\#1$;
- O par $(0q_1\#, q_201\#)$ é selecionado (passo 2):

$$\begin{aligned} A &: \#q_101\#1q_21\#10q_1\# \\ B &: \#q_101\#1q_21\#10q_1\#1q_201\# \end{aligned}$$

Exemplo

Continuação

- Para continuar, pode-se selecionar o par $(1, 1)$ (passo 3) ou então selecionar o par $(1q_20, q_310)$ (passo 2);
- Como a primeira escolha impede o desenvolvimento futuro das cadeias, deve-se optar pela segunda alternativa e o resultado é:

$$\begin{aligned} A &: \#q_101\#1q_21\#10q_1\#1q_20 \\ B &: \#q_101\#1q_21\#10q_1\#1q_201\#q_310 \end{aligned}$$

Exemplo

Continuação

- Esse ponto corresponde à entrada de M num estado de aceitação (q_3);
- Portanto, são iniciados os procedimentos para tornar as cadeias idênticas;
- Antes, porém, são selecionados os pares $(1, 1)$ e $(\#, \#)$:

$$\begin{aligned} A &: \#q_1 01 \# 1 q_2 1 \# 10 q_1 \# 1 q_2 01 \\ B &: \#q_1 01 \# 1 q_2 1 \# 10 q_1 \# 1 q_2 01 \# q_3 101 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &: \#q_1 01 \# 1 q_2 1 \# 10 q_1 \# 1 q_2 01 \# \\ B &: \#q_1 01 \# 1 q_2 1 \# 10 q_1 \# 1 q_2 01 \# q_3 101 \# \end{aligned}$$

Exemplo

Continuação

- Para continuar, é selecionado o par $(q_3 1, q_3)$ (passo 4):

$$\begin{aligned} A &: \#q_1 01 \# 1 q_2 1 \# 10 q_1 \# 1 q_2 01 \# q_3 1 \\ B &: \#q_1 01 \# 1 q_2 1 \# 10 q_1 \# 1 q_2 01 \# q_3 101 \# q_3 \end{aligned}$$

- Copiando os símbolos 0, 1 e $\#$ (passo 3):

$$\begin{aligned} A &: \#q_1 01 \# 1 q_2 1 \# 10 q_1 \# 1 q_2 01 \# q_3 101 \# \\ B &: \#q_1 01 \# 1 q_2 1 \# 10 q_1 \# 1 q_2 01 \# q_3 101 \# q_3 01 \# \end{aligned}$$

Exemplo

Continuação

- Para continuar, é selecionado o par (q_30, q_3) (passo 4):

$$\begin{aligned} A &: \#q_101\#1q_21\#10q_1\#1q_201\#q_3101\#q_30 \\ B &: \#q_101\#1q_21\#10q_1\#1q_201\#q_3101\#q_301\#q_3 \end{aligned}$$

- Copiando os símbolos 1 e $\#$ (passo 3):

$$\begin{aligned} A &: \#q_101\#1q_21\#10q_1\#1q_201\#q_3101\#q_301\# \\ B &: \#q_101\#1q_21\#10q_1\#1q_201\#q_3101\#q_301\#q_31\# \end{aligned}$$

Exemplo

Continuação

- Para continuar, é selecionado novamente o par $(q_3 1, q_3)$ (passo 4):

$$\begin{aligned} A &: \#q_1 01 \# 1 q_2 1 \# 10 q_1 \# 1 q_2 01 \# q_3 101 \# q_3 01 \# q_3 1 \\ B &: \#q_1 01 \# 1 q_2 1 \# 10 q_1 \# 1 q_2 01 \# q_3 101 \# q_3 01 \# q_3 1 \# q_3 \end{aligned}$$

- Copiando o símbolo $\#$ (passo 3):

$$\begin{aligned} A &: \#q_1 01 \# 1 q_2 1 \# 10 q_1 \# 1 q_2 01 \# q_3 101 \# q_3 01 \# q_3 1 \# \\ B &: \#q_1 01 \# 1 q_2 1 \# 10 q_1 \# 1 q_2 01 \# q_3 101 \# q_3 01 \# q_3 1 \# q_3 \# \end{aligned}$$

Exemplo

Continuação

- Para terminar, é selecionado o par $(q_3\#\#, \#)$ (passo 5):

$$
\begin{aligned}
A &: \#q_1 01 \# 1 q_2 1 \# 10 q_1 \# 1 q_2 01 \# q_3 101 \# q_3 01 \# q_3 1 \# q_3 \# \# \\
B &: \#q_1 01 \# 1 q_2 1 \# 10 q_1 \# 1 q_2 01 \# q_3 101 \# q_3 01 \# q_3 1 \# q_3 \# \#
\end{aligned}
$$

- As cadeias são idênticas e P tem solução.

Redução de L_u para MPCP

Para provar que a construção proposta é uma redução, é necessário (considerar P obtido a partir de M, w conforme visto anteriormente):

1. Provar que se $\langle M, w \rangle \in L_u$, então P é uma instância MPCP com solução;
2. Provar que se P é uma instância MPCP com solução, então $\langle M, w \rangle \in L_u$.

Redução de L_u para MPCP

Se $\langle M, w \rangle \in L_u$, então P é uma instância MPCP com solução:

- Iniciar a simulação com o par 1;
- Usar os pares do passo 2 para representar movimentações de M e pares do passo 3 para copiar símbolos da fita e $\#$ conforme necessário;
- Se M entrar num estado de aceitação, usar os pares do passo 4 e depois o par do passo 5 para permitir que as cadeias fiquem idênticas;
- Logo, se $\langle M, w \rangle \in L_u$, então P tem solução.

Redução de L_u para MPCP

Se P é uma instância MPCP com solução, então $\langle M, w \rangle \in L_u$:

- Por se tratar de MPCP, a solução parcial começa com:

$$\begin{aligned} A &: \# \\ B &: \#q_0 w \# \end{aligned}$$

Redução de L_u para MPCP

- Enquanto M não entra em um estado de aceitação, apenas os pares dos passos 2 e 3 pode ser usados, e as cadeias possuem o formato geral (observar que $|xy| > |x|$):

$$\begin{aligned} A &: x \\ B &: xy \end{aligned}$$

- Se existir uma solução, então isso significa que, em algum momento, os pares do passo 4 terão sido usados;
- Logo, se P tem solução, então M entra em um estado de aceitação, ou seja, M aceita w e $\langle M, w \rangle \in L_u$.

Problema AMB_{GLC}

Determinar se uma gramática livre de contexto G qualquer é ambígua:

$$AMB_{GLC} = \{\langle G \rangle \mid G \text{ é uma GLC ambígua}\}$$

Teorema: AMB_{GLC} é indecidível.
Prova:

- Por redução a partir de PCP.

Problema AMB_{GLC}

Construção de uma GLC G a partir de uma instância PCP P, tal que P tem solução $\Leftrightarrow$ G é ambígua:

- Seja $P = (A, B)$ sobre Σ;
- $A = w_1, w_2, ..., w_k$;
- $B = x_1, x_2, ..., x_k$;
- Seja G_A uma GLC que gera uma linguagem L_A sobre $\Sigma' = \Sigma \cup \{a_1, a_2, ..., a_k\}$:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow w_1 A a_1 \,|\, w_2 A a_2 \,|\, ... \,|\, w_k A a_k \\ A &\rightarrow w_1 a_1 \,|\, w_2 a_2 \,|\, ... \,|\, w_k a_k \end{aligned}$$

- a_i representa o índice i usado para selecionar o par correspondente.

Problema AMB_{GLC}

A linguagem L_A:

- Suas sentenças tem a forma geral:

$$w_{i_1} w_{i_2} ... w_{i_m} a_{i_m} ... a_{i_2} a_{i_1}$$

  com $m \geq 1$ e $1 \leq i_1, i_2, ..., i_m \leq k$.

- L_A é não-ambígua (todas as suas sentenças possuem uma única seqüência de derivações mais à esquerda).

Problema AMB_{GLC}

Seja G_B uma GLC que gera uma linguagem L_B sobre $\Sigma' = \Sigma \cup \{a_1, a_2, ..., a_k\}$:

- $A = w_1, w_2, ..., w_k$;
- $B = x_1, x_2, ..., x_k$;
- G_B:

$$\begin{aligned} B &\rightarrow x_1 B a_1 \,|\, x_2 B a_2 \,|\, ... \,|\, x_k B a_k \\ B &\rightarrow x_1 a_1 \,|\, x_2 a_2 \,|\, ... \,|\, x_k a_k \end{aligned}$$

- a_i representa o índice i usado para selecionar o par correspondente;
- L_B é não-ambígua.

Problema AMB_{GLC}

Construção de uma GLC G_{AB} a partir de G_A e G_B, que por sua vez foram construídas a partir de P:

- Seja $G_A = (\{A\} \cup \Sigma', \Sigma', P_A, A)$;
- Seja $G_B = (\{B\} \cup \Sigma', \Sigma', P_B, B)$;
- Construir $G_{AB} =$

$$(\{S, A, B\} \cup \Sigma', \Sigma', P_A \cup P_B \cup \{S \to A, S \to B\}, S)$$

- $L(G_{AB}) = L_A \cup L_B$.

Problema AMB_{GLC}

Para provar que a construção proposta é uma redução, basta provar que:

1. Se a instância PCP P tem solução, então G é ambígua;
2. Se G é ambígua, então a instância PCP P tem solução.

Problema AMB_{GLC}

Se G é ambígua, então P tem solução:

1. Considere $G = G_{AB}$;
2. Se G é ambígua, então existe pelo menos uma cadeia α com duas ou mais derivações mais à esquerda em $L(G)$;
3. Como, por construção, G_A e G_B são não-ambíguas, então as duas derivações para α devem ser:

$$S \Rightarrow A \Rightarrow ... \Rightarrow \alpha$$
$$S \Rightarrow B \Rightarrow ... \Rightarrow \alpha$$

4. No entanto, $\alpha = w_{i_1} w_{i_2} ... w_{i_m} a_{i_m} ... a_{i_2} a_{i_1} = x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_m} a_{i_m} ... a_{i_2} a_{i_1}$
5. Portanto, $w_{i_1} w_{i_2} ... w_{i_m} = x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_m}$
6. Logo, P tem uma solução $i_1, i_2, ..., i_m$.

Problema AMB_{GLC}

Se P tem solução, então G é ambígua:

1. Considere $G = G_{AB}$;
2. Suponha que $i_1, i_2, ..., i_m$ seja uma solução para P;
3. Considere as seguintes derivações em G:

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow A \Rightarrow w_{i_1} A a_{i_1} \Rightarrow w_{i_1} w_{i_2} A a_{i_2} a_{i_1} \Rightarrow ... \\
&\Rightarrow w_{i_1} w_{i_2} ... w_{i_{m-1}} A a_{i_{m-1}} ... a_{i_2} a_{i_1} \\
&\Rightarrow w_{i_1} w_{i_2} ... w_{i_{m-1}} w_{i_m} a_{i_m} a_{i_{m-1}} ... a_{i_2} a_{i_1} \\
S &\Rightarrow B \Rightarrow x_{i_1} B a_{i_1} \Rightarrow x_{i_1} x_{i_2} B a_{i_2} a_{i_1} \Rightarrow ... \\
&\Rightarrow x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_{m-1}} B a_{i_{m-1}} ... a_{i_2} a_{i_1} \\
&\Rightarrow x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_{m-1}} x_{i_m} a_{i_m} a_{i_{m-1}} ... a_{i_2} a_{i_1}
\end{aligned}
$$

Problema AMB_{GLC}

4. Como $i_1, i_2, ..., i_m$ é uma solução, então $w_{i_1} w_{i_2} ... w_{i_m} = x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_m}$
5. Como as cadeias são idênticas, e como elas foram geradas de formas distintas, usando apenas derivações mais à esquerda, então G é ambígua.

Como PCP reduz para AMB_{GLC} e PCP é indecidível, então AMB_{GLC} é também indecidível.

Exemplo

- Seja P a seguinte instância PCP sobre $\{a, b\}$:

	Lista A	Lista B
	w_i	x_i
1	aaa	aa
2	baa	$abaaa$

- Considerar $\Sigma' = \{a, b, a_1, a_2\}$ e G_A:

$$A \to aaaAa_1 \,|\, baaAa_2 \,|\, aaaa_1 \,|\, baaa_2$$

- Considerar $\Sigma' = \{a, b, a_1, a_2\}$ e G_B:

$$B \to aaBa_1 \,|\, abaaaBa_2 \,|\, aaa_1 \,|\, abaaaa_2$$

Exemplo

- Considerar $\Sigma' = \{a, b, a_1, a_2\}$ e G_{AB}:

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow A \mid B \\
A &\rightarrow aaaAa_1 \mid baaAa_2 \mid aaaa_1 \mid baaa_2 \\
B &\rightarrow aaBa_1 \mid abaaaBa_2 \mid aaa_1 \mid abaaaa_2
\end{aligned}
$$

Exemplo

Continuação

P tem solução $\Rightarrow$ G_{AB} é ambígua:

- A seqüência 121 é uma solução para P;
- Considerar $w_1w_2w_1a_1a_2a_1 \in L_A$ e $x_1x_2x_1a_1a_2a_1 \in L_B$;
- Como 121 é solução, então $w_1w_2w_1 = x_1x_2x_1$ e, portanto, $w_1w_2w_1a_1a_2a_1 = x_1x_2x_1a_1a_2a_1 = aaabaaaaaaa_1a_2a_1$;
- No entanto, existem duas derivações mais à esquerda distintas para essa cadeia em G_{AB}:

$$S \Rightarrow A \Rightarrow aaaAa_1 \Rightarrow aaabaaAa_2a_1 \Rightarrow aaabaaaaaaa_1a_2a_1$$
$$S \Rightarrow B \Rightarrow aaBa_1 \Rightarrow aaabaaaBa_2a_1 \Rightarrow aaabaaaaaaa_1a_2a_1$$

- Portanto, G_{AB} é ambígua.

Exemplo

Continuação

G_{AB} é ambígua $\Rightarrow$ P tem solução:

- Seja cadeia $aaabaaaaaaa_1a_2a_1 \in L_{AB}$;
- Essa cadeia tem duas derivações mais à esquerda distintas:

$$S \Rightarrow A \Rightarrow aaaAa_1 \Rightarrow aaabaaAa_2a_1 \Rightarrow aaabaaaaaa_1a_2a_1$$
$$S \Rightarrow B \Rightarrow aaBa_1 \Rightarrow aaabaaaBa_2a_1 \Rightarrow aaabaaaaaa_1a_2a_1$$

- Da primeira derivação, pode-se concluir que $aaabaaaaa = w_1w_2w_1$;
- Da segunda derivação, pode-se concluir que $aaabaaaaa = x_1x_2x_1$;
- Portanto, P tem uma solução (121).

Significado de $L_A \cap L_B$

A quantidade de sentenças em $L_A \cap L_B$ é igual à quantidade de soluções distintas da instância P do PCP que deu origem às gramáticas G_A e G_B:

- Cada elemento de $L_A \cap L_B$ corresponde à uma solução distinta;
- $L_A \cap L_B = \emptyset \Rightarrow P$ não tem solução;
- $L_A \cap L_B \neq \emptyset \Rightarrow P$ tem (pelo menos uma) solução.

No exemplo anterior:

- $aaabaaaaaa_1a_2a_1 \in (L_A \cap L_B) \Rightarrow P$ tem solução (121).

Complemento de uma linguagem de lista

- L_A e L_B são linguagens livres de contexto;
- Deseja-se provar que $\overline{L_A}$ e $\overline{L_B}$ são também livres de contexto;
- Linguagens livres de contexto não são fechadas em relação à operação de complementção;
- Esses resultados permitirão a demonstração de que outros problemas acerca das linguagens livres de contexto são também indecidíveis.

$\overline{L_A}$ é LLC

Teorema: Seja L_A uma linguagem para a lista A de uma instância PCP P sobre $\Sigma \cup \{a_1, a_2, ..., a_k\}$. Então $\overline{L_A}$ é também livre de contexto.

Prova:

Será apresentado um autômato de pilha determinístico M, com critério de aceitação estado final, que reconhece $\overline{L_A}$.

$\overline{L_A}$ é LLC

1. Enquanto M encontrar apenas símbolos de Σ na entrada, ele os insere na pilha. Se a cadeia de entrada esgotar, M aceita pois todas as cadeias de $\Sigma^* \in \overline{L_A}$;
2. Verificar se o próximo símbolo da cadeia de entrada é a_i; se não é, aceitar;
3. Desempilhar $|w_i|$ símbolos do topo da pilha; se não houverem $|w_i|$ símbolos na pilha, aceitar; se houverem, verificar se eles correspondem à w_i^R:
   (a) Em caso negativo, então a cadeia de entrada certamente não pertence à L_A. Nesso caso, M deve esgotar a leitura dos símbolos da cadeia de entrada e ir para um estado de aceitação;
   (b) Em caso afirmativo, e se a pilha ainda não está vazia, ir para 2;
   (c) Em caso afirmativo, e se a pilha está vazia, a cadeia analisada até o momento pertence à L_A. A aceitação ou rejeição de M estará condicionada à presença de novos símbolos no final da cadeia.
4. Se houverem outros símbolos de Σ na cadeia entrada, aceitar. Caso contrário, rejeitar.

Exemplo

Seja $\Sigma = \{0, 1\}$ e suponha que as listas A e B sejam as seguintes:

	Lista A	Lista B
i	w_i	x_i
1	1	111
2	10111	10
3	10	0

$$A \to 1Aa_1 \,|\, 10111Aa_2 \,|\, 10Aa_3 \,|\, 1a_1 \,|\, 10111a_2 \,|\, 10a_3$$

Exemplo

- A cadeia $\underbrace{10111}_{w_2}\underbrace{10}_{w_3}a_3a_2 \notin \overline{L_A}$, pois M:
  1. Empilha 1011110;
  2. Quando encontra a_3, desempilha $|w_3| = 2$ símbolos, $\sigma_1\sigma_2$;
  3. Verifica que $\sigma_1\sigma_2 = 01 = w_3^R$;
  4. Quando encontra a_2, desempilha $|w_2| = 5$ símbolos, $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5$;
  5. Verifica que $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5 = 11101 = w_2^R$;
  6. Como não há outros símbolos na cadeia de entrada, a cadeia pertence à L_A e portanto M a rejeita.

Exemplo

- A cadeia $\underbrace{10111}_{w_2}\underbrace{10}_{w_3}a_2a_3 \in \overline{L_A}$, pois:
  1. Empilha 1011110;
  2. Quando encontra a_2, desempilha $|w_2| = 5$ símbolos, $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5$;
  3. Verifica que $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5 = 01111 \neq w_2^R$ e aceita a entrada.
- A cadeia $a_3a_2\underbrace{10111}_{w_2}\underbrace{10}_{w_3} \in \overline{L_A}$, pois:
  1. Não existem símbolos na pilha para verificar depois de encontrado a_3.

Exemplo

- A cadeia $\underbrace{10111}_{w_2}\underbrace{10}_{w_3}a_3a_2a_1 \in \overline{L_A}$:
  1. Empilha 1011110;
  2. Quando encontra a_3, desempilha $|w_3| = 2$ símbolos, $\sigma_1\sigma_2$;
  3. Verifica que $\sigma_1\sigma_2 = 01 = w_3^R$;
  4. Quando encontra a_2, desempilha $|w_2| = 5$ símbolos, $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5$;
  5. Verifica que $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5 = 11101 = w_2^R$;
  6. Quando encontra a_1, M aceita a entrada.
- A cadeia $\underbrace{10111}_{w_2}\underbrace{10}_{w_3} \in \overline{L_A}$:
  1. Empilha 1011110;
  2. Como não encontra nenhum a_i, a entrada é aceita.

Exemplo

- A cadeia $\underbrace{11111}_{?} a_2 \in \overline{L_A}$:
  1. Empilha 11111;
  2. Quando encontra a_2, desempilha $|w_2| = 5$ símbolos, $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5$;
  3. Verifica que $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5 = 11111 \neq w_2^R$ e aceita a entrada.
- A cadeia $\underbrace{1111}_{?}\underbrace{1}_{w_1} a_1a_2 \in \overline{L_A}$:
  1. Empilha 11111;
  2. Quando encontra a_1, desempilha $|w_1| = 1$ símbolos, σ_1;
  3. Verifica que $\sigma_1 = 1 = w_1^R$;
  4. Quando encontra a_2, tenta desempilhar $|w_2| = 5$ símbolos, mas existem apenas 4 deles na pilha;
  5. M aceita a entrada.

Problemas

Sejam G_1, G_2 gramáticas livres de contexto quaisquer e R uma expressão regular qualquer. Os seguintes problemas são indecidíveis:

1. $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?
2. $L(G_1) = L(G_2)$?
3. $L(G_1) = L(R)$?
4. $L(G_1) = T^*$ para algum alfabeto T?
5. $L(G_1) \subseteq L(G_2)$?
6. $L(R) \subseteq L(G_1)$?

Problemas

Serão feitas reduções de PCP para cada um desses problemas:

- Seja Σ o alfabeto da instância PCP P considerada;
- Seja $I = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$;
- $L_A, L_B, \overline{L_A}$ e $\overline{L_B}$ são linguagens livres de contexto construídas sobre P;

Observações

Considere P uma instância PCP sobre Σ com listas A e B. Então:

- Se P tem solução, então $L_A \cap L_B \neq \emptyset$;
- $L_A \cap L_B$, sobre $\Sigma \cup I$, contém todas as cadeias que representam solução para P;
- $L_A \cap L_B$ contém tantas cadeias quantas sejam as soluções distintas para P;
- Se P não tem solução, então $L_A \cap L_B = \emptyset$;
- $\overline{L_A} \cup \overline{L_B} = \overline{L_A \cap L_B}$;
- $\overline{L_A \cap L_B}$, sobre $\Sigma \cup I$, contém todas as cadeias que não representam solução para P;
- $(\Sigma \cup I)^*$ contém todas as cadeias sobre $(\Sigma \cup I)$.

$L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?

$$INT_{GLC} = \{\langle G_1, G_2 \rangle \mid G_1 \text{ e } G_2 \text{ são GLCs e } L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset\}$$

- Seja $G_1 = G_A$;
- Seja $G_2 = G_B$;
- Se existe $w \in L(G_1) \cap L(G_2)$, então existe solução para P;
- O conjunto $L(G_1) \cap L(G_2)$ contém todas as cadeias que representam soluções de P;
- Logo, se P tem solução $\Rightarrow L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$;
- Além disso, se P não tem solução $\Rightarrow L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$;
- Temos uma redução de P para $\overline{INT_{GLC}}$;
- Portanto, $\overline{INT_{GLC}}$ e também INT_{GLC} são indecidíveis.

$L(G_1) = L(G_2)$?

$$EQ_{GLC} = \{\langle G_1, G_2 \rangle \mid G_1 \text{ e } G_2 \text{ são GLCs e } L(G_1) = L(G_2)\}$$

- Seja G_1 tal que $L(G_1) = \overline{L_A} \cup \overline{L_B}$ (LLCs são fechadas em relação à união);
- Seja G_2 tal que $L(G_2) = (\Sigma \cup I)^*$ (a linguagem é regular);
- Notar que $L(G_1) = \overline{L_A} \cup \overline{L_B} = \overline{L_A \cap L_B}$; portanto, $L(G_1)$ contém todas as cadeias que não representam solução para P;
- $L(G_2)$ contém todas as cadeias sobre o alfabeto $\Sigma \cup I$;
- Logo, P tem solução $\Leftrightarrow L(G_1) \neq L(G_2)$ e temos uma redução de P para $\overline{EQ_{GLC}}$;
- Portanto, $\overline{EQ_{GLC}}$ e também EQ_{GLC} são indecidíveis.

$L(G_1) = L(R)$?

$$EQ_{GLC/R} = \{\langle G_1, R\rangle \mid G_1 \text{ é uma GLC,}$$
$$R \text{ é uma expressão regular e } L(G_1) = L(R)\}$$

- Idêntico ao caso anterior;
- Basta substituir G_2 por R e usar R tal que $L(R) = (\Sigma \cup I)^*$.

$L(G_1) = T^*$?

$TOT_{GLC} = \{\langle G_1 \rangle \mid G_1$ é uma GLC e $L(G_1) = T^*$ para algum alfabeto $T\}$

- Seja G_1 tal que $L(G_1) = \overline{L_A} \cup \overline{L_B}$ (LLCs são fechadas em relação à união);
- Notar que $L(G_1) = \overline{L_A} \cup \overline{L_B} = \overline{L_A \cap L_B}$; portanto, $L(G_1)$ contém todas as cadeias que não representam solução para P;
- Logo, P tem solução $\Leftrightarrow L(G_1) \neq T^*$ e temos uma redução de P para $\overline{TOT_{GLC}}$;
- Notar que $T = \Sigma \cup \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ é o único alfabeto sobre o qual $\overline{L_A} \cup \overline{L_B}$ pode corresponder a um fechamento;
- Portanto, $\overline{TOT_{GLC}}$ e também TOT_{GLC} são indecidíveis.

$L(G_1) \subseteq L(G_2)$?

$$SUB_{GLC} = \{\langle G_1, G_2 \rangle \mid G_1 \text{ e } G_2 \text{ são GLCs e } L(G_1) \subseteq L(G_2)\}$$

- Seja G_1 tal que $L(G_1) = (\Sigma \cup I)^*$; $L(G_1)$ contém todas as cadeias;
- Seja G_2 tal que $L(G_2) = \overline{L_A} \cup \overline{L_B}$; $L(G_2)$ contém apenas as cadeias que não representam solução para P;
- $L(G_1) \subseteq L(G_2) \Leftrightarrow L(G_1) = L(G_2)$;
- $L(G_1) \not\subseteq L(G_2) \Leftrightarrow L(G_1) \neq L(G_2)$;

$L(G_1) \subseteq L(G_2)$?

$$SUB_{GLC} = \{\langle G_1, G_2 \rangle \mid G_1 \text{ e } G_2 \text{ são GLCs e } L(G_1) \subseteq L(G_2)\}$$

- Logo, P tem solução $\Rightarrow$ $L(G_1)$ contém pelo menos uma cadeia que não pertence à $L(G_2) \Rightarrow L(G_1) \neq L(G_2) \Rightarrow L(G_1) \not\subseteq L(G_2)$;
- Além disso, P não tem solução $\Rightarrow$ $L(G_2)$ contém todas as cadeias $\Rightarrow$ $L(G_1) = L(G_2) \Rightarrow L(G_1) \subseteq L(G_2)$;
- Temos uma redução de P para $\overline{SUB_{GLC}}$;
- Portanto, $\overline{SUB_{GLC}}$ e também SUB_{GLC} são indecidíveis.

$L(R) \subseteq L(G_1)$?

$$SUB_{R/GLC} = \{\langle R, G_1 \rangle \mid R \text{ é uma expressão regular,}$$
$$G_1 \text{ é uma GLC e } L(R) \subseteq L(G_1)\}$$

- Idêntico ao caso anterior;
- Basta substituir G_1 por R e usar R tal que $L(R) = (\Sigma \cup I)^*$.
- Substituir G_2 por G_1.