TEORIA DA COMPUTAÇÃO

Prova 3 – 04/09/2018 – Prof. Marcus Ramos

1ª Questão (2,0 pontos): Formule o problema de decidir se um problema de decisão representado na forma de uma linguagem recursivamente enumerável é decidível ou não. Prove que este problema é indecidível. Dica: utilize o Teorema de Rice.

$$P = \{< p > \mid p \text{ é } um\ problema\ de\ decisão\ decidível\}$$

Basta provar que $ser\ decidível$ é uma propriedade não-trivial da classe das linguagens recursivamente enumeráveis. Para isto, é suficiente mostrar que esta propriedade é não-trival para a classe das linguagens recursivamente enumeráveis. Ou seja, que existe pelo menos um problema decidível e pelo menos um indecidível. São exemplos disso:

- O problema do pertencimento na classe das linguagens regulares (toda linguagem regular é também recursivamente enumerável) é decidível (existe uma MT que sempre pára);
- O problema do pertencimento na classe das linguagens recursivamente enumeráveis é indecidível (não existe MT que sempre pára).

De outra forma: como $ser\ decidível$ é o mesmo que $ser\ recursiva$, fica claro que, entre as linguagens recursivamente enumeráveis, existem algumas que são recursivas e outras que não são recursivas. Logo, $ser\ recursiva$ é uma propriedade não-trivial das linguagens recursivamente enumeráveis e, conforme o Teorema de Rice, $ser\ recursiva$ é um problema indecidível desta classe de linguagens.

2ª Questão (2,0 pontos): Descreva, de forma genérica, sucinta e objetiva, a prova da indecidibilidade do PCP.

A prova é feita em duas partes: na primeira prova-se que existe uma redução de L_u para MPCP (PCP modificado). A redução, neste caso, obtém uma instância MPCP P_1 a partir do par <M,w> de tal forma que P_1 tem solução se e somente se M aceita w. Em seguida, prova-se que existe uma redução de MPCP para PCP. A redução, neste caso, obtém uma instância PCP P_2 a partir de uma instância MPCP P_1 de tal forma que P_2 tem solução se e somente se P_1 tem solução. Como se sabe que L_u é indecidível, a primeira redução prova que MPCP é indecidível. A segunda redução prova que PCP é indecidível.

3ª Questão (1,5 pontos): Prove algebricamente: se f é $O(g)$, e g não produz valores negativos, então $f * g$ é $O(g^2)$.

Pela definição, existem n_1 e c_1 tais que para todo $n >= n_1, f(n) <= c_1 * g(n)$. Multiplicando-se ambos os lados por $g(n)$ a desigualdade é preservada: $f(n) * g(n) <= c_1 * g(n) * g(n)$. Ou seja, $f * g$ é $O(g^2)$.

4ª Questão (1,5 pontos): Como provar que um problema pertence à classe P?

Existem duas formas: (i) apresentando uma MT determinística de tempo polinomial que decida o problema, ou (ii) apresentando uma redução de tempo polinomial deste problema para outro que pertence à P. Neste caso, a combinação de uma redução eficiente com uma solução eficiente para o segundo problema resulta numa solução eficiente para o primeiro problema.

5ª Questão (1,5 pontos): Como provar que um problema pertence à $NP - P$?

Não existe forma conhecida. Uma eventual prova implicaria em $P \neq NP$, algo que ainda não se conseguiu provar depois de décadas de tentativas. De qualquer forma, a prova teria que mostrar que, para o problema considerado, não existe MT determinística de tempo polinomial que decida o mesmo.

6ª Questão (1,5 pontos): Você é apresentado a um novo problema de decisão P_2 e consegue provar que ele pode ser reduzido em tempo polinomial a partir de um outro problema P_1 que é NP-completo. Que conclusões você pode tirar deste fato?

A conclusão mais importante é que P_2 provavelmente não pertence à classe P. Pois, se pertencesse, então $P = NP$, algo que não se conseguiu provar ainda, depois de quase 50 anos de esforços em todo o mundo. Logo, haveriam fortes evidências de que P_2 não possui solução de tempo polinomial. Além disso, você terá provado que P_2 é $NP - hard$.