Cálculo Lambda

Prof. Marcus Vinícius Midena Ramos

Universidade Federal do Vale do São Francisco

29 de setembro de 2017

marcus.ramos@univasf.edu.br
www.univasf.edu.br/~marcus.ramos

Bibliografia

1. *Lambda-Calculus and Combinators - An Introduction*
   J. R. Hindley and J. P. Seldin
   Cambridge University Press, 2008
   Capítulos 1, 3, 4 e 5
2. *Teoria da Computação: Máquinas Universais e Computabilidade*
   T. A. Divério e P. B. Menezes
   Bookman, 2011, 3ª edição
   Capítulo 8
3. http://en.wikipedia.org/wiki/Lambda_calculus
4. http://en.wikipedia.org/wiki/Church_encoding
5. http://www.cburch.com/proj/lambda/index.html

Roteiro

Características

Sistema formal para representação de computações.

- Baseado na definição e aplicação de funções;
- Funções são anônimas (não estão associadas à identificadores);
- Funções são tratadas como objetos de ordem mais elevada, podendo ser passados como argumentos e retornados de outras funções;
- Simplicidade: possui apenas dois "comandos";
- Permite a combinação de operadores e funções básicas na geração de operadores mais complexos;

Características

- Modelo alternativo para a representação de computações (usando funções no lugar de máquinas);
- Equivalente à Maquina de Turing;
- Mesmo na versão *pura* (sem constantes), permite a representação de uma ampla gama de operações e tipos de dados, entre números inteiros e variáveis lógicas;
- Versões não-tipada e tipada.

História

- Alonzo Church, 1903-1995, Estados Unidos;
- Inventou o Cálculo Lambda na década de 1930;
- Resultado das suas investigações acerca dos fundamentos da matemática;
- Pretendia formalizar a matemática através da noção de funções ao invés da teoria de conjuntos;
- Apesar de não conseguir sucesso, seu trabalho teve grande impacto em outras áreas, especialmente na computação.

Aplicações

Modelo matemático para:

- Teoria, especificação e implementação de linguagens de programação baseadas em funções, especialmente as linguagens funcionais;
- Verificação de programas;
- Representação de funções computáveis;
- Teoria da Computabilidade;
- Teoria de Tipos;
- Teoria das Provas;
- Assistentes interativos de provas (ex: Coq).

Foi usado na demonstração da indecidibilidade de diversos problemas da matemática, antes mesmo dos formalismos baseados em máquinas.

Motivação

Considere a expressão $x - y$. Ela pode ser formalizada, na notação matemática usual, através de funções com um único parâmetro:

- $f(x) = x - y$, ou
- $g(y) = x - y$.

ou, ainda:

- $f : x \mapsto x - y$, ou
- $g : y \mapsto x - y$.

Por exemplo:

- $f(0) = 0 - y$, ou
- $f(1) = 1 - y$.

Motivação

Representação dessas funções na linguagem lambda:

- $f = \lambda x.x - y$, ou
- $g = \lambda y.x - y$.

A aplicação da função a um argumento é representada pela justaposição da função ao argumento:

- $(\lambda x.x - y)(0) = 0 - y$, ou
- $(\lambda x.x - y)(1) = 1 - y$.

Motivação

Funções com múltiplos parâmetros:

- $h(x, y) = x - y$, ou
- $k(y, x) = x - y$.

Podem ser representadas na linguagem lambda como:

- $h = \lambda xy.x - y$, ou
- $k = \lambda yx.x - y$.

Motivação

Tais funções, no entanto, podem também ser representadas como funções que retornam outras funções como valores:

$$h^* = \lambda x.(\lambda y.(x - y))$$

De fato, para cada a temos:

$$h^*(a) = (\lambda x.(\lambda y.(x - y))(a) = \lambda y.(a - y)$$

Para cada par a e b temos:

$$(h^*(a))(b) = ((\lambda x.(\lambda y.(x - y))(a))(b) = (\lambda y.(a - y))(b) = a - b = h(a, b)$$

Portanto h^* representa h e, de forma geral, todas as funções com múltiplos parâmetros podem ser representadas através da combinação de funções com um único parâmetro.

Funções computáveis

No Cálculo Lambda, diz-se que uma função $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é computável se e somente se existir uma expressão-lambda f tal que:

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, F(x) = y \Leftrightarrow f x =_\beta y$$

($=_\beta$ é chamada "igualdade beta", serve para estabelecer a equivalência entre termos de uma equação envolvendo termos lambda e será introduzida mais adiante)

Trata-se apenas de uma das formas possíveis de se definir computabilidade, como é o caso da Máquina de Turing, de outras máquinas, e das funções recursivas. A equivalência desses formalismos foi demonstrada.

Definição

Um λ-termo (também chamado de expressão lambda) é definido de forma indutiva sobre um conjunto de identificadores $\{x, y, z, u, v...\}$ que representam variáveis:

- Uma variável (também chamada "átomo") é um λ-termo;
- Aplicação: se M e N são λ-termos, então (MN) é um λ-termo; representa a aplicação de M a N;
- Abstração: se M é um λ-termo e x é uma variável, então $(\lambda x.M)$ é um λ-termo; representa a função que retorna M com o parâmetro x;

A linguagem lambda é composta por todos os λ-termos que podem ser construídos sobre um certo conjunto de identificadores; trata-se de uma linguagem com apenas dois operadores ou "comandos": aplicação de função à argumentos (chamada de função) e abstração (definição de função).

Gramática

$$
\begin{array}{lcl}
V & \rightarrow & u \mid v \mid x \mid y \mid z \mid w \mid \ldots \\
T & \rightarrow & V \\
T & \rightarrow & (TT) \\
T & \rightarrow & (\lambda V.T)
\end{array}
$$

Exemplos

São exemplos de λ-termos:

- x
- (xy)
- $(\lambda x.(xy))$
- $((\lambda y.y)(\lambda x.(xy)))$
- $(x(\lambda x.(\lambda x.x)))$
- $(\lambda x.(yz))$

Associatividade e precedência

Para reduzir a quantidade de parênteses, são usadas as seguintes convenções:

- Aplicações tem prioridade sobre abstrações;
- Aplicações são associativas à esquerda;
- Abstrações são associativas à direita.

Por exemplo:

- $\lambda x.PQ$ denota $(\lambda x.(PQ))$ — e não $((\lambda x.P)Q)$;
- $MNPQ$ denota $(((MN)P)Q)$ — e não $(M(N(PQ)))$;
- $\lambda xyz.M$ denota $(\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.M)))$

O símbolo $\equiv$ é usado para denotar a equivalência sintática de λ-termos.

Exemplos

- $xyz(yx) \equiv (((xy)z)(yx))$
- $\lambda x.(uxy) \equiv (\lambda x.((ux)y))$
- $\lambda u.u(\lambda x.y) \equiv (\lambda u.(u(\lambda x.y)))$
- $(\lambda u.vuu)zy \equiv (((\lambda u.((vu)u))z)y)$
- $ux(yz)(\lambda v.vy) \equiv (((ux)(yz))(\lambda v.(vy)))$
- $(\lambda xyz.xz(yz))uvw \equiv (\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.((xz)(yz)))))u)v)w)$

Comprimento

O "comprimento" de um λ-termo M — $lgh(M)$ — é o número total de ocorrências de átomos em M.

- Para todo átomo a, $lgh(a) = 1$;
- $lgh(MN) = lgh(M) + lgh(N)$;
- $lgh(\lambda x.M) = 1 + lgh(M)$

Se $M \equiv x(\lambda y.yux)$ então $lgh(M) = 5$.

Ocorrência

Sejam P e Q dois λ-termos. A relação P "ocorre" em Q (ou ainda, P está contido em Q, Q contém P ou P é subtermo de Q) é definida de forma indutiva:

- P ocorre em P;
- Se P ocorre em M ou em N, então P ocorre em (MN);
- Se P ocorre em M ou $P \equiv x$ então P ocorre em $(\lambda x.M)$.

No termo $((xy)(\lambda x.(xy)))$ existem duas ocorrências de (xy) e três de x.

Exemplos

- As ocorrências de xy em $\lambda xy.xy$ são $\lambda xy.xy \equiv (\lambda x.(\lambda y.(\underbrace{xy})))$.
- As ocorrências de uv em $x(uv)(\lambda u.v(\underbrace{uv}))uv$ são $((((x(\underline{uv}))(\lambda u.(v(\underbrace{uv}))))u)v)$.
- O termo $\lambda u.u$ não ocorre em $\lambda u.uv$ pois $\lambda u.uv \equiv (\lambda u.(uv))$.

Escopo

Para uma particular ocorrência de $\lambda x.M$ em P, a ocorrência de M é chamada de "escopo" da ocorrência de λx à esquerda.
Exemplo: seja

$$P \equiv (\lambda y.yx(\lambda x.y(\lambda y.z)x))vw$$

- O escopo do λy mais à esquerda é $yx(\lambda x.y(\lambda y.z)x)$;
- O escopo do λx é $y(\lambda y.z)x$;
- O escopo do λy mais à direita é z.

Variáveis livres e ligadas

A ocorrência de uma variável x em um termo P é dita:

- "Ligada" se ela está no escopo de um λx em P;
- "Ligada e ligadora" se e somente se ela é o x em λx;
- "Livre" caso contrário.

Variáveis livres e ligadas

- Se x tem pelo menos uma ocorrência ligadora em P, x é chamada de "variável ligada" de P;
- Se x tem pelo menos uma ocorrência livre em P, x é chamada "variável livre" de P;
- O conjunto de todas as variáveis livres de P é denotado $FV(P)$;
- Um termo que não contém variáveis livres é chamado "fechado".

Variáveis livres e ligadas

Para determinar $FV(P)$:

- $FV(\sigma) = \{\sigma\}$ se σ é variável;
- $FV(\sigma) = \emptyset$ se σ é constante;
- $FV((MN)) = FV(M) \cup FV(N)$;
- $FV((\lambda x.M)) = FV(M) - \{x\}$.

Exemplo

Considere o termo $xv(\lambda yz.yv))))w) \equiv$

$$(((xv)(\lambda y.(\lambda z.(yv))))w)$$

- O x mais à esquerda é livre;
- O v mais à esquerda é livre;
- O y mais à esquerda é ligado e ligador;
- O único z é ligado e ligador;
- O y mais à direita é ligado mas não é ligador;
- O v mais à direita é livre;
- O único w é livre.

Exemplo

Considere o termo $P \equiv$

$$(\lambda y.yx(\lambda x.y(\lambda y.z)x))vw$$

- Todos os quatro y são ligados;
- Os y mais à esquerda e mais à direita são ligadores;
- O x mais à esquerda é livre;
- O x central é ligado e ligador;
- O x mais à direita é ligado mas não ligador;
- z, v e w são livres.
- Logo, $FV(P) = \{x, z, v, w\}$; x, nesse caso, é uma variável ligada e também livre de P.

Definição

Para todo M, N, x, $[N/x]M$ é definido como o resultado da substituição de toda ocorrência livre de x em M por N, juntamente com a mudança de variáveis ligadas caso isso seja necessário para evitar colisões.

a. $[N/x]x \equiv N$;
b. $[N/x]a \equiv a$, para todo átomo $a \not\equiv x$;
c. $[N/x](PQ) \equiv ([N/x]P[N/x]Q)$;
d. $[N/x](\lambda x.P) \equiv \lambda x.P$;
e. $[N/x](\lambda y.P) \equiv \lambda y.P$, se $x \notin FV(P)$;
f. $[N/x](\lambda y.P) \equiv \lambda y.[N/x]P$, se $x \in FV(P)$ e $y \notin FV(N)$;
g. $[N/x](\lambda y.P) \equiv \lambda z.[N/x][z/y]P$, se $x \in FV(P)$ e $y \in FV(N)$.

Nos casos (e)-(g), $y \not\equiv x$; no caso (g), z é a primeira variável $\notin FV(NP)$.

Substituição de variável ligada

Considere (i) $\lambda y.x$ e (ii) $\lambda w.x$. Trata-se da mesma função (função constante que retorna x), porém com diferentes argumentos.

i. Suponha $[w/x](\lambda y.x)$. Então, $[w/x](\lambda y.x) \equiv \lambda y.w$, pela aplicação da regra (f), pois $x \in FV(x)$ e $y \notin FV(w)$;

ii. Suponha $[w/x](\lambda w.x)$. Se a substituição fosse feita também pela regra (f), então $[w/x](\lambda w.x) \equiv \lambda w.w$. Mas $\lambda w.w$ é a função identidade, e não a função constante. Para evitar esse problema, a aplicação da regra (g) produz $[w/x](\lambda w.x) \equiv \lambda z.[w/x][z/w]x \equiv \lambda z.[w/x]x \equiv \lambda z.w$, e nesse caso obtemos a mesma função constante. Observe que, nesse caso, $x \in FV(x)$ e $w \in FV(w)$.

Exercícios

Avaliar as seguintes substituições conforme as regras anteriormente apresentadas:

- $[(uv)/x](\lambda x.zy)$
- $[(\lambda y.xy)/x](\lambda y.x(\lambda x.x))$
- $[(uv)/x](\lambda y.x(\lambda w.vwx))$
- $[(\lambda y.vy)/x](y(\lambda v.xv))$

Soluções dos exercícios

$[(uv)/x](\lambda x.zy)$

- Aplicação da regra (d): $\lambda x.zy$

Soluções dos exercícios

$[(\lambda y.xy)/x](\lambda y.x(\lambda x.x))$

- Reescrita com todos os parênteses: $[(\lambda y.(xy))/x](\lambda y.(x(\lambda x.x)))$
- Aplicação da regra (f), pois $x \in FV(x(\lambda x.x))$ e $y \notin FV(\lambda y.(xy))$: $\lambda y.([\lambda y.(xy)/x](x(\lambda x.x)))$
- Aplicação da regra (c): $\lambda y.([\lambda y.(xy)/x]x)([\lambda y.(xy)/x](\lambda x.x))$
- Aplicação da regra (a): $\lambda y.(\lambda y.(xy))([\lambda y.(xy)/x](\lambda x.x))$
- Aplicação da regra (e), pois $x \notin FV(x)$: $\lambda y.((\lambda y.(xy))(\lambda x.x))$
- Remoção dos parênteses desnecessários: $\lambda y.(\lambda y.xy)(\lambda x.x)$

Soluções dos exercícios

$[uv/x](\lambda y.x(\lambda w.vwx))$

- Reescrita com todos os parênteses: $[uv/x](\lambda y.(x(\lambda w.((vw)x))))$
- Aplicação da regra (f), pois $x \in FV(x(\lambda w.((vw)x)))$ e $y \notin FV(uv)$: $\lambda y.([uv/x](x(\lambda w.((vw)x))))$
- Aplicação da regra (c): $\lambda y.([uv/x]x)([uv/x](\lambda w.((vw)x)))$
- Aplicação da regra (a): $\lambda y.(uv[uv/x](\lambda w.((vw)x)))$
- Aplicação da regra (f), pois $x \in FV(\lambda w.((vw)x))$ e $w \notin FV(uv)$: $\lambda y.(uv(\lambda w.([uv/x]((vw)x))))$
- Aplicação da regra (c): $\lambda y.(uv(\lambda w.([uv/x](vw)[uv/x]x)))$
- Aplicação da regra (b): $\lambda y.(uv(\lambda w.(vw[uv/x]x)))$
- Aplicação da regra (a): $\lambda y.(uv(\lambda w.(vw)(uv)))$
- Remoção dos parênteses desnecessários: $\lambda y.uv(\lambda w.vw(uv))$

Soluções dos exercícios

$[\lambda y.vy/x](y(\lambda v.xv))$

- Aplicação da regra (c): $([\lambda y.vy/x]y)([\lambda y.vy/x](\lambda v.xv))$
- Aplicação da regra (b): $y([\lambda y.vy/x](\lambda v.xv))$
- Aplicação da regra (g), pois $x \in FV(xv)$ e $v \in FV(\lambda y.vy)$: $y(\lambda z.[\lambda y.vy/x][z/v](xv))$
- Aplicação da regra (c): $y(\lambda z.[\lambda y.vy/x](([z/v]x)([z/v]v)))$
- Aplicação da regra (b): $y(\lambda z.[\lambda y.vy/x](x([z/v]v)))$
- Aplicação da regra (a): $y(\lambda z.[\lambda y.vy/x](xz))$
- Aplicação da regra (c): $y(\lambda z.(([\lambda y.vy/x]x)([\lambda y.vy/x]z)))$
- Aplicação da regra (a): $y(\lambda z.((\lambda y.vy)([\lambda y.vy/x]z)))$
- Aplicação da regra (b): $y(\lambda z.((\lambda y.vy)z))$
- Remoção dos parênteses desnecessários: $y(\lambda z.(\lambda y.vy)z)$

Conversão-α

Seja P um termo que contém uma ocorrência de $\lambda x.M$ e suponha que $y \notin FV(M)$. A substituição de:

$$\lambda x.M \text{ por } \lambda y.[y/x]M$$

é chamada *troca de variável livre* ou ainda *conversão-α* em P. Se P pode ser transformado em Q por meio de uma série finita de conversões-α, diz-se que P e Q são *congruentes* ou então que P é *α-conversível* para Q, denotado:

$$P \equiv_\alpha Q.$$

Exemplo de conversão-α

$$
\begin{aligned}
\lambda xy.x(xy) &\equiv \lambda x.(\lambda y.x(xy)) \\
&\equiv_\alpha \lambda x.(\lambda v.x(xv)) \\
&\equiv_\alpha \lambda u.(\lambda v.u(uv)) \\
&\equiv \lambda uv.u(uv))
\end{aligned}
$$

Propriedades da conversão-α

Para todos P, Q e R:

- *(reflexividade)* $P \equiv_\alpha P$;
- *(transitividade)* $P \equiv_\alpha Q, Q \equiv_\alpha R \Rightarrow P \equiv_\alpha R$;
- *(simetria)* $P \equiv_\alpha Q \Rightarrow Q \equiv_\alpha P$.

Definição

Um termo da forma:

$$(\lambda x.M)N$$

é chamado β-*redex*, e o termo correspondente:

$$[N/x]M$$

é chamado o seu *contractum*. Se um termo P contém uma ocorrência de $(\lambda x.M)N$ e a mesma é substituída por $[N/x]M$, gerando P', diz-se que que ocorrência redex em P foi *contraída* e que P β-*contrai* para P', denotado:

$$P \rhd_{1\beta} P'.$$

Definição

Se um termo P pode ser convertido em um termo Q através de um número finito de reduções-β e conversões-α, diz-se que P β-reduz para Q, denotado:

$$P \triangleright_{\beta} Q.$$

Exemplos

$$
\begin{aligned}
(\lambda x.x(xy))N &\quad \triangleright_{1\beta} \quad N(Ny) \\
(\lambda x.y)N &\quad \triangleright_{1\beta} \quad y
\end{aligned}
$$

Exemplos

$$
\begin{aligned}
(\lambda x.(\lambda y.yx)z)v \quad & \triangleright_{1\beta} \quad [v/x]((\lambda y.yx)z) \equiv (\lambda y.yv)z \\
& \triangleright_{1\beta} \quad [z/y](yv) \equiv zv
\end{aligned}
$$

Exemplos

$$
\begin{aligned}
(\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \quad & \triangleright_{1\beta} \quad [(\lambda x.xx)/x](xx) \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \\
& \triangleright_{1\beta} \quad [(\lambda x.xx)/x](xx) \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \\
& \triangleright_{1\beta} \quad [(\lambda x.xx)/x](xx) \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \\
& \triangleright_{1\beta} \quad [(\lambda x.xx)/x](xx) \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \\
& etc.
\end{aligned}
$$

Exemplos

$$\begin{array}{rcl}
(\lambda x.xxy)(\lambda x.xxy) & \rhd_{1\beta} & (\lambda x.xxy)(\lambda x.xxy)y \\
 & \rhd_{1\beta} & (\lambda x.xxy)(\lambda x.xxy)yy \\
 & \rhd_{1\beta} & (\lambda x.xxy)(\lambda x.xxy)yyy \\
 & \rhd_{1\beta} & (\lambda x.xxy)(\lambda x.xxy)yyyy \\
 & etc. &
\end{array}$$

Forma normal

- Um termo Q que não possui nenhuma redução-β é chamado de *forma normal-*β;
- Se um termo P reduz-β para um termo Q na forma normal-β, então diz-se que Q é uma *formal normal-*β de P.

Exemplos

- $(\lambda x.(\lambda y.yx)z)v$ tem como forma normal-β zv;
- $L \equiv (\lambda x.xxy)(\lambda x.xxy) \rhd_{1\beta} Ly \rhd_{1\beta} Lyy \rhd_{1\beta} \ldots$ não tem normal normal-β pois trata-se de uma seqüência infinita e não existe outra forma de reduzir-β a expressão;
- $P \equiv (\lambda u.v)L$ possui as seguintes reduções:
  - $P \equiv (\lambda u.v)L \rhd_{1\beta} [L/u]v \equiv v$;
  - $P \rhd_{1\beta} (\lambda u.v)(Ly) \rhd_{1\beta} (\lambda u.v)(Lyy) \rhd_{1\beta} \ldots$

  Portanto, P tem forma normal-β e também uma seqüência infinita de reduções.
- $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$, também conhecido como Ω, não possui forma normal-β, pois ele reduz sempre para si mesmo e não há outra redução possível.

Interpretação

Expressão lambda:

- Representa um programa, um algoritmo, um procedimento para produzir um resultado;

Redução-β:

- Representa uma computação, a passagem de um estado de um programa para o estado seguinte, dentro do processo de geração de um resultado.

Forma normal:

- Representa um resultado de uma computação, um valor que não é passível de novas simplificações ou elaborações.

Exercícios

Reduzir os seguintes termos para formas normais-β:

- $(\lambda x.xy)(\lambda u.vuu)$
- $(\lambda xy.yx)uv$
- $(\lambda x.x(x(yz))x)(\lambda u.uv)$
- $(\lambda x.xxy)(\lambda y.yz)$
- $(\lambda xy.xyy)(\lambda u.uyx)$
- $(\lambda xyz.xz(yz))((\lambda xy.yx)u)((\lambda xy.yx)v)w$

Soluções dos exercícios

$$
\begin{aligned}
\underbrace{(\lambda x.xy)(\lambda u.vuu)} \quad & \rhd_{1\beta} \quad [\lambda u.vuu/x](xy) \equiv \underbrace{(\lambda u.vuu)y} \\
& \rhd_{1\beta} \quad [y/u](vuu) \equiv vyy
\end{aligned}
$$

Soluções dos exercícios

$$(\lambda xy.yx)uv \equiv ((\lambda x.(\lambda y.yx))u)v$$

$$\begin{aligned} (\underbrace{(\lambda x.(\lambda y.yx))u})v \quad & \rhd_{1\beta} \quad ([u/x](\lambda y.yx))v \equiv \underbrace{(\lambda y.yu)v} \\ & \rhd_{1\beta} \quad [v/y](yu) \equiv vu \end{aligned}$$

Soluções dos exercícios

$$\begin{array}{rcl}
\underbrace{(\lambda x.x(x(yz))x)(\lambda u.uv)} & \rhd_{1\beta} & [(\lambda u.uv)/x](x(x(yz))x) \\
& \equiv & (\lambda u.uv)(\underbrace{(\lambda u.uv)(yz)})(\lambda u.uv) \\
& \rhd_{1\beta} & (\lambda u.uv)([(yz)/u](uv))(\lambda u.uv) \\
& \equiv & \underbrace{(\lambda u.uv)((yz)v)}(\lambda u.uv) \\
& \rhd_{1\beta} & ([((yz)v)/u](uv))(\lambda u.uv) \\
& \equiv & ((yz)v)v(\lambda u.uv) \\
& \equiv & yzvv(\lambda u.uv)
\end{array}$$

Soluções dos exercícios

$$
\begin{aligned}
\underbrace{(\lambda x.xxy)(\lambda y.yz)} \quad & \rhd_{1\beta} \quad [(\lambda y.yz)/x](xxy) \equiv \underbrace{(\lambda y.yz)(\lambda y.yz)}\, y \\
& \rhd_{1\beta} \quad [(\lambda y.yz)/y](yz)y \equiv \underbrace{(\lambda y.yz)z}\, y \\
& \rhd_{1\beta} \quad ([z/y](yz))y \equiv zzy
\end{aligned}
$$

Soluções dos exercícios

$$(\lambda xy.xyy)(\lambda u.uyx) \equiv (\lambda x.(\lambda y.xyy))(\lambda u.uyx)$$

$$\begin{array}{rcl}
\underbrace{(\lambda x.(\lambda y.xyy))(\lambda u.uyx)} & \rhd_{1\beta} & [(\lambda u.uyx)/x](\lambda y.xyy) \\
 & \equiv & [(\lambda u.uyx)/x](\lambda z.xzz) \\
 & \equiv & \lambda z.\underbrace{(\lambda u.uyx)z}\,z \\
 & \rhd_{1\beta} & \lambda z.([z/u](uyx))z \\
 & \equiv & \lambda z.zyxz
\end{array}$$

ou ainda:

$$\begin{array}{rcl}
\underbrace{(\lambda x.(\lambda y.xyy))(\lambda u.uyx)} & \equiv_{\alpha} & (\lambda v.(\lambda w.vww))(\lambda u.uyx) \\
 & \rhd_{\beta} & \lambda w.wyxw
\end{array}$$

Soluções dos exercícios

No caso:

$$(\lambda xyz.xz(yz))((\lambda xy.yx)u)((\lambda xy.yx)v)w$$

observar que:

- $(\lambda xy.yx)u \equiv (\lambda x.(\lambda y.yx))u \triangleright_{1\beta} [u/x](\lambda y.yx) \equiv \lambda y.yu$
- $(\lambda xy.yx)v \triangleright_{1\beta} \lambda y.yv$

Soluções dos exercícios

$$
\begin{aligned}
(\lambda xyz.xz(yz))(\underbrace{(\lambda xy.yx)u})(\underbrace{(\lambda xy.yx)v})w &\rhd_{\beta} \\
(\lambda xyz.xz(yz))(\lambda y.yu)(\lambda y.yv)w &\equiv \\
\underbrace{(\lambda x.\lambda y.\lambda z.xz(yz))(\lambda y.yu)}(\lambda y.yv)w &\rhd_{1\beta} \\
[(\lambda y.yu)/x](\lambda y.\lambda z.xz(yz))(\lambda y.yv)w &\equiv \\
\underbrace{(\lambda y.\lambda z.(\lambda y.yu)z(yz))(\lambda y.yv)}\, w &\rhd_{1\beta} \\
[(\lambda y.yv)/y](\lambda z.(\lambda y.yu)z(yz))w &\equiv \\
\underbrace{(\lambda z.(\lambda y.yu)z((\lambda y.yv)z))w} &\rhd_{1\beta}
\end{aligned}
$$

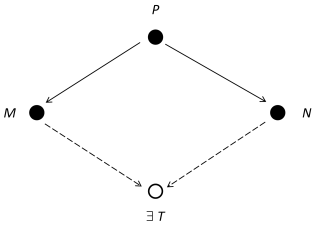
Soluções dos exercícios

$$
\begin{aligned}
[w/z]((\lambda y.yu)z((\lambda y.yv)z)) &\equiv \\
\underbrace{(\lambda y.yu)w}((\lambda y.yv)w) &\rhd_{1\beta} \\
[w/y](yu)((\lambda y.yv)w) &\equiv \\
wu(\underbrace{(\lambda y.yv)w}) &\rhd_{1\beta} \\
wu([w/y](yv)) &\equiv \\
& wu(wv)
\end{aligned}
$$

Teorema de Church-Rosser para $\triangleright_\beta$

Se $P \triangleright_\beta M$ e $P \triangleright_\beta N$, então existe um termo T tal que:

$$M \triangleright_\beta T \quad \text{e} \quad N \triangleright_\beta T.$$



Teorema de Church-Rosser para $\triangleright_\beta$

A redução-β é *confluente*.
Conseqüências:

- Uma computação no Cálculo Lambda não pode produzir dois ou mais resultados diferentes;
- Duas ou mais reduções de um mesmo termo produzem a mesma forma normal (o resultado da computação independe do caminho escolhido).
- Exemplo:
  $P \equiv (\lambda u.v)L$ reduz para $M \equiv v$ e também para $N \equiv (\lambda u.v)(Lyy)$.
  No entanto, tanto M quanto N reduzem para $T \equiv v$.

Teorema de Church-Rosser para $\triangleright_\beta$

Corolário: Se P tem uma forma normal-β, ela é única módulo $\equiv_\alpha$, ou seja, se P possui formas normais-β M e N, então $M \equiv_\alpha N$.

Prova: Suponha que $P \triangleright_\beta M$ e $P \triangleright_\beta N$, e que ambos M, N reduzem para T. Como M e N não possuem redexes e, pelo Teorema de Church-Rosser, deve existir um termo T tal que $M \triangleright_\beta T$ e $M \triangleright_\beta T$, segue que $M \equiv_\alpha T$ e $N \equiv_\alpha T$. Como a conversão-α é transitiva, segue que $M \equiv_\alpha N$.

Exercício 1

Inserir os parênteses e λs faltantes nos seguintes termos-λ abreviados:

1. $xx(xxx)x$;
2. $vw(\lambda xy.vx)$;
3. $(\lambda xy.x)uv$;
4. $w(\lambda xyz.xz(yz))uv$.

Solução do exercício 1

1. $xx(xxx)x \equiv (((xx)((xx)x))x)$;
2. $vw(\lambda xy.vx) \equiv ((vw)(\lambda x.(\lambda y.(vx))))$;
3. $(\lambda xy.x)uv \equiv (((\lambda x.(\lambda y.x))u)v)$;
4. $w(\lambda xyz.xz(yz))uv \equiv (((w(\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.((xz)(yz))))))u)v)$.

Exercício 2

Marcar todas as ocorrências de xy nos seguintes termos:

1. $(\lambda xy.xy)xy$;
2. $(\lambda xy.xy)(xy)$;
3. $\lambda xy.xy(xy)$.

Solução do exercício 2

1. $(\lambda xy.xy)xy \equiv (((\lambda x.(\lambda y.(\underline{xy})))x)y)$;
2. $(\lambda xy.xy)(xy) \equiv ((\lambda x.(\lambda y.(\underline{xy})))(\underline{xy}))$;
3. $\lambda xy.xy(xy) \equiv (\lambda x.(\lambda y.((\underline{xy})(\underline{xy}))))$.

Exercício 3

Indicar os termos dos exercícios 1 e 2 que contêm algum dos seguintes subtermos:

1. $\lambda y.xy$;
2. $y(xy)$;
3. $\lambda xy.x$.

Solução do exercício 3

1. $\lambda y.xy$:
   (2.1): $(((\lambda x.(\underline{(\lambda y.(xy))})))x)y)$;
   (2.2): $((\lambda x.(\underline{(\lambda y.(xy))})))(xy))$.
2. $y(xy)$:
   Nenhuma ocorrência.
3. $\lambda xy.x \equiv \lambda x.(\lambda y.x)$:
   (1.3): $(((\underline{(\lambda x.(\lambda y.x))})u)v)$.

Exercício 4

Avaliar as seguintes substituições:

1. $[vw/x](x(\lambda y.yx))$;
2. $[vw/x](x(\lambda x.yx))$;
3. $[ux/x](x(\lambda y.yx))$;
4. $[uy/x](x(\lambda y.yx))$.

Solução do exercício 4

1. $[vw/x](x(\lambda y.yx)) \equiv ([vw/x]x[vw/x](\lambda y.yx)) \equiv ((vw)[vw/x](\lambda y.yx)) \equiv ((vw)(\lambda y.[vw/x](yx))) \equiv ((vw)(\lambda y.([vw/x]y[vw/x]x))) \equiv ((vw)(\lambda y.(y(vw))))$;
2. $[vw/x](x(\lambda x.yx)) \equiv ([vw/x]x[vw/x](\lambda x.yx)) \equiv (vw[vw/x](\lambda x.yx)) \equiv (vw(\lambda x.yx))$;
3. $[ux/x](x(\lambda y.yx)) \equiv ([ux/x]x[ux/x](\lambda y.yx)) \equiv ((ux)[ux/x](\lambda y.yx)) \equiv ((ux)(\lambda y.[ux/x](yx))) \equiv ((ux)(\lambda y.([ux/x]y[ux/x]x))) \equiv ((ux)(\lambda y.(y[ux/x]x))) \equiv ((ux)(\lambda y.(y(ux))))$;
4. $[uy/x](x(\lambda y.yx)) \equiv ([uy/x]x[uy/x](\lambda y.yx)) \equiv ((uy)[uy/x](\lambda y.yx)) \equiv ((uy)(\lambda z.[uy/x][z/y](yx))) \equiv ((uy)(\lambda z.[uy/x]([z/y]y[z/y]x))) \equiv ((uy)(\lambda z.[uy/x](z[z/y]x))) \equiv ((uy)(\lambda z.[uy/x](zx))) \equiv ((uy)(\lambda z.([uy/x]z[uy/x]x))) \equiv ((uy)(\lambda z.(z[uy/x]x))) \equiv ((uy)(\lambda z.(z(uy))))$.

Exercício 5

Reduzir os seguintes termos para formas normais-β:

1. $(\lambda xy.xyy)uv$;
2. $(\lambda xy.yx)(uv)zw$;
3. $(\lambda xy.x)(\lambda u.u)$;
4. $(\lambda xyz.xz(yz))(\lambda uv.u)$.

Solução do exercício 5

1. $(\lambda xy.xyy)uv \equiv$
   $(((\underline{\lambda x.(\lambda y.((xy)y)))})\underline{u})v) \rhd_{1\beta}$
   $(([u/x](\lambda y.((xy)y)))v) \equiv$
   $(((\underline{\lambda y.((uy)y))})\underline{v}) \rhd_{1\beta}$
   $([v/y]((uy)y)) \equiv$
   $(((uv)v))$

Solução do exercício 5

2. $(\lambda xy.yx)(uv)zw \equiv$
$((((\underline{\lambda x.(\lambda y.(yx))})(\underline{uv}))z)w) \triangleright_{1\beta}$
$((([uv/x](\lambda y.(yx)))z)w) \equiv$
$((((\lambda y.[uv/x](yx)))z)w) \equiv$
$((((\lambda y.([uv/x]y[uv/x]x)))z)w) \equiv$
$((((\lambda y.(y[uv/x]x)))z)w) \equiv$
$((((\underline{\lambda y.(y(uv))}))\underline{z})w) \triangleright_{1\beta}$
$(([z/y](y(uv)))w) \equiv$
$((([z/y]y[z/y](uv)))w) \equiv$
$(((z[z/y](uv)))w) \equiv$
$(((z([z/y]u[z/y]v)))w) \equiv$
$(((z(u[z/y]v)))w) \equiv$
$(((z(uv)))w)$

Solução do exercício 5

3. $(\lambda xy.x)(\lambda u.u) \equiv$
   $(\underline{\lambda x.(\lambda y.x)})(\underline{\lambda u.u}) \triangleright_{1\beta}$
   $[((\lambda u.u))/x](\lambda y.x) \equiv$
   $(\lambda y.[((\lambda u.u))/x]x) \equiv$
   $(\lambda y.(\lambda u.u))$

Solução do exercício 5

4. $(\lambda xyz.xz(yz))(\lambda uv.u) \equiv$
$(\underline{\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.((xz)(yz)))))}(\underline{\lambda u.(\lambda v.u))}) \rhd_{1\beta}$
$[((\lambda u.(\lambda v.u))/x](\lambda y.(\lambda z.((xz)(yz)))) \equiv$
$\lambda y.[(\lambda u.(\lambda v.u))/x](\lambda z.((xz)(yz))) \equiv$
$\lambda y.(\lambda z.[(\lambda u.(\lambda v.u))/x]((xz)(yz))) \equiv$
$\lambda y.(\lambda z.([(\lambda u.(\lambda v.u))/x](xz)[(\lambda u.(\lambda v.u))/x](yz))) \equiv$
$\lambda y.(\lambda z.(((\lambda u.(\lambda v.u))z)[(\lambda u.(\lambda v.u))/x](yz))) \equiv$
$\lambda y.(\lambda z.(((\underline{\lambda u.(\lambda v.u)})\underline{z})(yz))) \rhd_{1\beta}$
$\lambda y.(\lambda z.(([z/u](\lambda v.u))(yz))) \equiv$
$\lambda y.(\lambda z.(((\lambda v.[z/u]u))(yz))) \equiv$
$\lambda y.(\lambda z.((\underline{(\lambda v.z)})(\underline{yz}))) \rhd_{1\beta}$
$\lambda y.(\lambda z.([yz/v]z)) \equiv$
$\lambda y.(\lambda z.(z))$

Sistemas puro e aplicado

- No Cálculo Lambda *"puro"* não existe representação para números inteiros, operações aritméticas, valores ou operadores lógicos, entre outros tipos de dados e operações usualmente encontradas em linguagens de programação de alto-nível;
- No Cálculo Lambda *"aplicado"* admite-se o uso explícito dos mesmos:

$$\lambda x.x + 1$$

$$(\lambda x.x + 1)(3) \rhd_{1\beta} [3/x](x + 1) \equiv 3 + 1 \equiv 4$$

- É possível, no entanto, representar tipos de dados e operadores quaisquer usando o sistema puro, como demonstram os casos apresentados a seguir.

Numerais de Church

Definição

Para todo $n \in \mathbb{N}$, o "Numeral de Church" de n, denotado $\overline{n}$, é um termo-λ que representa n:

$$\overline{n} := \lambda xy.x^n y$$

onde:

$$x^n y$$

é definido como:

$$\begin{cases} x^n y \equiv \underbrace{x(x(\ldots(x}_{n \text{ vezes}}\, y)\ldots)) \text{ se } n \geq 1 \\ x^0 y \equiv y \end{cases}$$

Numerais de Church

Exemplos

$$\begin{array}{rcl}
\overline{0} & := & \lambda xy.y \\
\overline{1} & := & \lambda xy.xy \\
\overline{2} & := & \lambda xy.x(xy) \\
\overline{3} & := & \lambda xy.x(x(xy)) \\
\overline{4} & := & \lambda xy.x(x(x(xy))) \\
 & \ldots &
\end{array}$$

Numerais de Church

Propriedade

Os Numerais de Church tem a propriedade de que, para quaisquer termos F e X,

$$\overline{n} F X \rhd_{\beta} F^{n} X.$$

Em outras palavras, o numeral de Church inserido na frente de uma aplicação de uma função ao seu argumento representa a aplicação repetida dessa função o mesmo número de vezes.

Numerais de Church

Propriedade

Exemplo:

$$
\begin{array}{rcl}
\overline{2}FX & \equiv & (\lambda xy.x(xy))FX \\
 & \equiv & ((\lambda xy.x(xy))F)X \\
 & \triangleright_{1\beta} & [F/x](\lambda y.x(xy))X \\
 & \equiv & (\lambda y.F(Fy))X \\
 & \triangleright_{1\beta} & [X/y]F(Fy) \\
 & \equiv & F(FX) \\
 & \equiv & F^2X
\end{array}
$$

Numerais de Church

Sucessor

O sucessor de um Numeral de Church pode ser obtido pela aplicação da expressão:

$$\overline{succ} := \lambda uxy.x(uxy)$$

ao respectivo numeral. É fácil provar que:

$$\overline{succ}\ \overline{n} \rhd_\beta \overline{n+1}.$$

De fato, basta obervar que:

$$(\lambda uxy.x(uxy))\overline{n} \rhd_\beta \lambda xy.x(\overline{n}xy) \equiv \lambda x.\lambda y.xx^n y \equiv \lambda x.\lambda y.x^{n+1}y \equiv \overline{n+1}.$$

Numerais de Church

Sucessor

Exemplo:

$$
\begin{array}{rcl}
\overline{succ}\ \overline{0} & \equiv & (\lambda uxy.x(uxy))(\lambda xy.y) \\
& \rhd_{1\beta} & [(\lambda xy.y)/u](\lambda xy.x(uxy)) \\
& \equiv & (\lambda xy.x((\lambda xy.y)xy) \\
& \rhd_{\beta} & (\lambda xy.xy) \\
& \equiv & \overline{1}
\end{array}
$$

Numerais de Church

Adição

A adição de dois Numerais de Church pode ser obtida pela aplicação da expressão:

$$\overline{add} := \lambda uvxy.ux(vxy)$$

aos respectivos operandos. Nesse caso, temos que:

$$\overline{add}\ \overline{m}\ \overline{n} \rhd_\beta \overline{m+n}.$$

De fato, basta observar que:

$$(\lambda uvxy.ux(vxy))\overline{m}\ \overline{n} \rhd_\beta \lambda xy.\overline{m}x(\overline{n}xy) \equiv \lambda xy.\overline{m}x(x^n y)$$

$$\equiv \lambda xy.x^m(x^n y) \equiv \lambda xy.x^{m+n}y \equiv \overline{m+n}$$

Numerais de Church

Adição

Exemplo:

$$
\begin{array}{rcl}
\overline{add}\ \overline{1}\ \overline{2} & \equiv & (\lambda uvxy.ux(vxy))(\lambda xy.xy)(\lambda xy.x(xy)) \\
 & \rhd_{1\beta} & ([(\lambda xy.xy)/u](\lambda vxy.ux(vxy)))(\lambda xy.x(xy)) \\
 & \equiv & (\lambda vxy.(\lambda xy.xy)x(vxy))(\lambda xy.x(xy)) \\
 & \rhd_{\beta} & (\lambda vxy.x(vxy))(\lambda xy.x(xy)) \\
 & \rhd_{1\beta} & [(\lambda xy.x(xy))/v](\lambda xy.x(vxy)) \\
 & \equiv & (\lambda xy.x((\lambda xy.x(xy))xy)) \\
 & \rhd_{\beta} & (\lambda xy.x(x(xy))) \\
 & \equiv \overline{3} &
\end{array}
$$

Numerais de Church

Multiplicação

A multiplicação de dois Numerais de Church pode ser obtida pela aplicação da expressão:

$$\overline{mult} := \lambda uvx.u(vx)$$

aos respectivos operandos. Nesse caso, temos que:

$$\overline{mult}\ \overline{m}\ \overline{n} \rhd_\beta \overline{m * n}$$

.

Numerais de Church

Multiplicação

De fato, temos que:

$$\begin{array}{rcl}
(\lambda uvx.u(vx))\ \overline{m}\ \overline{n} & \triangleright_\beta & \lambda x.\overline{m}(\overline{n}x) \\
& \equiv & \lambda x.\overline{m}((\lambda y.\lambda z.y^n z)x) \\
& \triangleright_\beta & \lambda x.\overline{m}(\lambda z.x^n z) \\
& \equiv & \lambda x.(\lambda u.\lambda v.u^m v)(\lambda z.x^n z) \\
& \triangleright_\beta & \lambda x.[\lambda z.x^n z/u](\lambda v.u^m v) \\
& \equiv & \lambda x.\lambda v.(\lambda z.x^n z)^m v \\
& \equiv & \lambda x.\lambda v.(\lambda z.x^n z)^{m-1}((\lambda z.x^n z)v)
\end{array}$$

Numerais de Church

Multiplicação

Continuação:

$$
\begin{array}{rcl}
\lambda x.\lambda v.(\lambda z.x^n z)^{m-1}((\lambda z.x^n z)v) & \rhd_\beta & \lambda x.\lambda v.(\lambda z.x^n z)^{m-1}(x^n v) \\
 & \equiv & \lambda x.\lambda v.(\lambda z.x^n z)^{m-2}((\lambda z.x^n z)x^n v) \\
 & \rhd_\beta & \lambda x.\lambda v.(\lambda z.x^n z)^{m-2}(x^n(x^n v)) \\
 & \equiv & \lambda x.\lambda v.(\lambda z.x^n z)^{m-2}(x^{2*n} v)) \\
 & \rhd_\beta & \lambda x.\lambda v.x^{m*n} v \\
 & \equiv & \overline{m*n}
\end{array}
$$

Numerais de Church

Multiplicação

Exemplo:

$$
\begin{array}{lcl}
\overline{mult}\ \overline{2}\ \overline{2} & \equiv & (\lambda uvx.u(vx))\overline{2}\ \overline{2} \\
& \rhd_{1\beta} & ([\overline{2}/u](\lambda vx.u(vx)))\overline{2} \\
& \equiv & (\lambda vx.\overline{2}(vx)))\overline{2} \\
& \rhd_{1\beta} & [\overline{2}/v](\lambda x.\overline{2}(vx)) \\
& \equiv & \lambda x.\overline{2}(\overline{2}x) \\
& \rhd_{1\beta} & \lambda x.\overline{2}(\lambda y.x(xy)) \\
& \rhd_{1\beta} & \lambda x.\lambda y.(\lambda y.x(xy))((\lambda y.x(xy))y \\
& \rhd_{1\beta} & \lambda x.\lambda y.(\lambda y.x(xy))(x(xy) \\
& \rhd_{1\beta} & \lambda x.\lambda y.x(x(x(xy))) \\
& \equiv \overline{4} &
\end{array}
$$

Numerais de Church

Exponenciação

A exponenciação de dois Numerais de Church pode ser obtida pela aplicação da expressão:

$$\overline{exp} := \lambda uv.vu$$

aos respectivos operandos. Nesse caso, temos que:

$$\overline{exp}\ \overline{m}\ \overline{n} \rhd_\beta \overline{m^n}.$$

Numerais de Church

Exponenciação

De fato, temos que:

$$
\begin{array}{rcl}
(\lambda uv.vu)\ \overline{m}\ \overline{n} & \rhd_\beta & \overline{n}\ \overline{m} \\
& \equiv & (\lambda x.\lambda y.x^n y)\ \overline{m} \\
& \rhd_\beta & \lambda y.(\overline{m})^n y \\
& \equiv & \lambda y.(\overline{m}(\overline{m}(...(\overline{m}(\overline{m}y))))) \\
& \rhd_\beta & \lambda y.(\overline{m}(\overline{m}(...(\overline{m}(\lambda w.y^m w))))) \\
& \rhd_\beta & \lambda y.(\overline{m}(\overline{m}(...(\lambda w.y^{m^2} w)))) \\
& \rhd_\beta & \lambda y.(\lambda w.y^{m^n} w) \\
& \equiv & \overline{m^n}
\end{array}
$$

Numerais de Church

Exponenciação

Exemplo:

$$
\begin{array}{rcl}
\overline{exp}\ \overline{2}\ \overline{2} & \equiv & (\lambda u.\lambda v.vu)\overline{2}\ \overline{2} \\
& \rhd_\beta & (\lambda v.v\overline{2})\overline{2} \\
& \rhd_\beta & \overline{2}\ \overline{2} \\
& \equiv & (\lambda x.\lambda y.x(xy))\overline{2} \\
& \rhd_\beta & \lambda y.\overline{2}(\overline{2}y) \\
& \equiv & \lambda y.\overline{2}((\lambda x.\lambda z.x.(xz))y) \\
& \rhd_\beta & \lambda y.\overline{2}(\lambda z.y(yz)) \\
& \equiv & \lambda y.(\lambda x.\lambda w.x(xw))(\lambda z.y(yz))
\end{array}
$$

Numerais de Church

Exponenciação

Exemplo (continuação):

$$
\begin{array}{lcl}
\lambda y.(\lambda x.\lambda w.x(xw))(\lambda z.y(yz)) & \triangleright_\beta & \lambda y.[\lambda z.y(yz)/x](\lambda w.x(xw)) \\
& \equiv & \lambda y.\lambda w.[\lambda z.y(yz)/x](x(xw)) \\
& \equiv & \lambda y.\lambda w.(\lambda z.y(yz))((\lambda z.y(yz))w) \\
& \triangleright_\beta & \lambda y.\lambda w.(\lambda z.y(yz))(y(yw)) \\
& \triangleright_\beta & \lambda y.\lambda w.[y(yw)/z](y(yz)) \\
& \equiv & \lambda y.\lambda w.(y(y(y(yw)))) \\
& \equiv & \overline{4}
\end{array}
$$

Numerais de Church

Outras operações

- Predecessor ($n - 1$ se $n > 0$ ou 0 caso contrário):

$$\overline{pred} := \lambda n.\lambda f.\lambda x.n(\lambda g.\lambda h.h(gf))(\lambda u.x)(\lambda u.u)$$

- Subtração ($m - n$ se $m \geq n$ ou 0 caso contrário):

$$\overline{sub} := \lambda m.\lambda n.(n\ \overline{pred})m$$

Numerais de Church

Expressões compostas

Através da combinação das expressões lambda anteriores, é possível representar expressões aritméticas mais complexas, como é o caso de:

$$(2^3 + 4) * 5$$

que é denotada:

$$\overline{mult}\ (\ \overline{add}\ (\ \overline{exp}\ \overline{2}\ \overline{3}\ )\ \overline{4}\ )\ \overline{5} \equiv$$

$$\underbrace{\underbrace{(\lambda uvx.u(vx))}_{\overline{mult}}\,\underbrace{(\underbrace{(\lambda uvxy.ux(vxy))}_{\overline{add}}\,\underbrace{(\underbrace{(\lambda uv.vu)}_{\overline{exp}}\,\overline{2}\ \overline{3})}_{2^3}\,\overline{4})}_{2^3+4}\,\overline{5}}_{(2^3+4)*5} \rhd_\beta \overline{60}.$$

Numerais de Church

Exercícios

Determinar:

- $\overline{succ}\ \overline{1}$;
- $\overline{add}\ \overline{2}\ \overline{3}$;
- $\overline{mult}\ \overline{0}\ \overline{3}$;
- $\overline{exp}\ \overline{3}\ \overline{2}$;
- $\overline{pred}\ \overline{2}$;
- $\overline{sub}\ \overline{3}\ \overline{1}$;
- $\overline{add}\ (\overline{add}\ \overline{1}\ \overline{2})(\overline{mult}\ \overline{2}\ \overline{3})$.

Booleanos de Church

Definição

O Cálculo Lambda puro também permite a representação de valores e operações lógicas:

- $\overline{true} := \lambda x.\lambda y.x$
  (projeção do primeiro argumento);
- $\overline{false} := \lambda x.\lambda y.y$
  (projeção do segundo argumento);
  Observar que $\overline{false} \equiv \overline{0}$.

Booleanos de Church

AND

$$\overline{and} := \lambda x.\lambda y.xyx$$

É possível provar que:

$$\overline{and}\ \overline{m}\ \overline{n} \rhd_\beta \overline{m\ and\ n}$$

De fato:

$$(\lambda x.\lambda y.xyx)\ \overline{m}\ \overline{n} \rhd_\beta \overline{m}\ \overline{n}\ \overline{m}$$

- Se $m = TRUE$, então projeta como resultado o valor de n;
- Se $m = FALSE$, projeta como resultado o próprio valor de m.

Booleanos de Church

AND

Exemplos:

$$
\begin{aligned}
(\lambda x.\lambda y.xyx)\ \overline{true}\ \overline{true} &\ \triangleright_\beta\ \overline{true}\ \underbrace{\overline{true}}\ \overline{true} \\
&\ \triangleright_\beta\ \overline{true}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\lambda x.\lambda y.xyx)\ \overline{false}\ \overline{true} &\ \triangleright_\beta\ \overline{false}\ \overline{true}\ \underbrace{\overline{false}} \\
&\ \triangleright_\beta\ \overline{false}
\end{aligned}
$$

Booleanos de Church

OR

$$\overline{or} := \lambda x.\lambda y.xxy$$

É possível provar que:

$$\overline{or}\ \overline{m}\ \overline{n} \rhd_\beta \overline{m\ or\ n}$$

De fato:

$$(\lambda x.\lambda y.xxy)\ \overline{m}\ \overline{n} \rhd_\beta \overline{m}\ \overline{m}\ \overline{n}$$

- Se $m = TRUE$, então projeta como resultado o próprio valor de m;
- Se $m = FALSE$, projeta como resultado o valor de n.

Booleanos de Church

OR

Exemplos:

$$
\begin{aligned}
(\lambda x.\lambda y.xxy)\ \overline{true}\ \overline{false} &\rhd_\beta \overline{true}\ \underbrace{\overline{true}}\ \overline{false} \\
&\rhd_\beta \overline{true}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\lambda x.\lambda y.xxy)\ \overline{false}\ \overline{true} &\rhd_\beta \overline{false}\ \overline{false}\ \underbrace{\overline{true}} \\
&\rhd_\beta \overline{true}
\end{aligned}
$$

Booleanos de Church
NOT

$$\overline{not} := \lambda x.\lambda y.\lambda z.xzy$$

É possível provar que:

$$\overline{not}\ \overline{m} \rhd_\beta \overline{not(m)}$$

De fato:

$$(\lambda x.\lambda y.\lambda z.xzy)\ \overline{m} \rhd_\beta \lambda y.\lambda z.\overline{m}zy$$

- Se $m = TRUE$, então $\lambda y.\lambda z.\overline{m}zy \rhd_\beta \lambda y.\lambda z.z \equiv \overline{false}$;
- Se $m = FALSE$, então $\lambda y.\lambda z.\overline{m}zy \rhd_\beta \lambda y.\lambda z.y \equiv \overline{true}$.

Booleanos de Church

NOT

Exemplos:

$$
\begin{array}{rcl}
(\lambda x.\lambda y.\lambda z.xzy)\ \overline{true} & \rhd_\beta & \lambda y.\lambda z.(\overline{true})zy \\
 & \rhd_\beta & \lambda y.\lambda z.z \\
 & \equiv & \overline{false}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
(\lambda x.\lambda y.\lambda z.xzy)\ \overline{false} & \rhd_\beta & \lambda y.\lambda z.(\overline{false})zy \\
 & \rhd_\beta & \lambda y.\lambda z.y \\
 & \equiv & \overline{true}
\end{array}
$$

Booleanos de Church

XOR

$$\overline{xor} := \lambda x.\lambda y.\lambda z.\lambda w.x(ywz)(yzw)$$

É possível provar que:

$$\overline{xor}\ \overline{m}\ \overline{n} \triangleright_\beta \overline{m\ xor\ n}$$

Booleanos de Church
XOR

De fato:

$$(\lambda x.\lambda y.\lambda z.\lambda w.x(ywz)(yzw))\ \overline{m}\ \overline{n} \rhd_\beta \lambda z.\lambda w.\overline{m}(\overline{n}wz)(\overline{n}zw)$$

- Se $m = TRUE$, então $\lambda z.\lambda w.\overline{m}(\overline{n}wz)(\overline{n}zw) \rhd_\beta \lambda z.\lambda w.\overline{n}wz$;
  - Se $n = TRUE$, então $\lambda z.\lambda w.\overline{n}wz \rhd_\beta \lambda z.\lambda w.w \equiv \overline{false}$;
  - Se $n = FALSE$, então $\lambda z.\lambda w.\overline{n}wz \rhd_\beta \lambda z.\lambda w.z \equiv \overline{true}$.
- Se $m = FALSE$, então $\lambda z.\lambda w.\overline{m}(\overline{n}wz)(\overline{n}zw) \rhd_\beta \lambda z.\lambda w.\overline{n}zw$;
  - Se $n = TRUE$, então $\lambda z.\lambda w.\overline{n}zw \rhd_\beta \lambda z.\lambda w.z \equiv \overline{true}$;
  - Se $n = FALSE$, então $\lambda z.\lambda w.\overline{n}zw \rhd_\beta \lambda z.\lambda w.w \equiv \overline{false}$.

Booleanos de Church

XOR

Exemplos:

$$
\begin{array}{rcl}
(\lambda x.\lambda y.\lambda z.\lambda w.x(ywz)(yzw))\ \overline{true}\ \overline{false} & \rhd_\beta & \\
\lambda z.\lambda w.\overline{true}((\overline{false})wz)((\overline{false}))zw & \rhd_\beta & \\
\lambda z.\lambda w.(\overline{false})wz & \rhd_\beta & \\
\lambda z.\lambda w.z & \equiv & \overline{true}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
(\lambda x.\lambda y.\lambda z.\lambda w.x(ywz)(yzw))\ \overline{false}\ \overline{false} & \rhd_\beta & \\
\lambda z.\lambda w.\overline{false}((\overline{false})wz)((\overline{false}))zw & \rhd_\beta & \\
\lambda z.\lambda w.(\overline{false})zw & \rhd_\beta & \\
\lambda z.\lambda w.w & \equiv & \overline{false}
\end{array}
$$

Booleanos de Church

IF

$$\overline{if} := \lambda x.\lambda y.\lambda z.xyz$$

É possível provar que:

$$\overline{if}\ \overline{e}\ \overline{m}\ \overline{n} \rhd_\beta \overline{m} \text{ se } e = TRUE$$

$$\overline{if}\ \overline{e}\ \overline{m}\ \overline{n} \rhd_\beta \overline{n} \text{ se } e = FALSE$$

De fato:

$$(\lambda x.\lambda y.\lambda z.xyz)\ \overline{e}\ \overline{m}\ \overline{n} \rhd_\beta \overline{e}\ \overline{m}\ \overline{n}$$

- Se $e = TRUE$, então projeta m como resultado;
- Se $e = FALSE$, projeta n como resultado.

Booleanos de Church

IF

Exemplos:

$$\begin{aligned}(\lambda x.\lambda y.\lambda z.xyz)\ \overline{true}\ \overline{m}\ \overline{n} \quad &\rhd_\beta \quad \overline{true}\ \overline{m}\ \overline{n}\\ &\rhd_\beta \quad \overline{m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda x.\lambda y.\lambda z.xyz)\ \overline{false}\ \overline{m}\ \overline{n} \quad &\rhd_\beta \quad \overline{false}\ \overline{m}\ \overline{n}\\ &\rhd_\beta \quad \overline{n}\end{aligned}$$

Booleanos de Church

Exercícios

Avaliar:

- $\overline{and}\ \overline{true}\ \overline{false}$
- $\overline{or}\ \overline{false}\ \overline{false}$
- $\overline{xor}\ \overline{false}\ \overline{true}$
- $\overline{or}\ (\ \overline{and}\ \overline{true}\ \overline{false}\ )\ \overline{true}$;
- $\overline{not}\ (\ \overline{xor}\ \overline{true}\ (\ \overline{not}\ \overline{true}\ ))$.

Construir expressões lambda para os operadores:

- Implicação ($\Rightarrow$) (dica: usar $\overline{not}$ e $\overline{or}$);
- Bi-implicação ($\Leftrightarrow$) (dica: usar $\overline{and}$).

Booleanos de Church

Expressões compostas - ZERO

Através da combinação das expressões anteriores, é possível representar funções mais complexas, que fazem uso de valores e operadores lógicos e aritméticos simultâneamente, como é o caso da função que testa se o argumento é zero e retorna $\overline{true}$ ou $\overline{false}$:

$$\overline{zero} := \lambda x.x(\lambda y.\overline{false})\ \overline{true}.$$

Booleanos de Church

Expressões compostas - ZERO

De fato, para $n = 0$:

$$
\begin{array}{rl}
(\lambda x.x(\lambda y.\overline{false})\ \overline{true})\ \overline{0} & \rhd_\beta \\
\overline{0}\ (\lambda y.\overline{false})\ \overline{true} & \equiv \\
\overline{false}\ (\lambda y.\overline{false})\ \overline{true} & \rhd_\beta \\
\overline{true} &
\end{array}
$$

Booleanos de Church

Expressões compostas - ZERO

E para $n > 0$:

$$
\begin{aligned}
(\lambda x.x(\lambda y.\overline{false})\ \overline{true})\ \overline{n} & \quad \triangleright_\beta \\
\overline{n}\ (\lambda y.\overline{false})\ \overline{true} & \quad \equiv \\
(\lambda z.\lambda w.z^n w)(\lambda y.\overline{false})\ \overline{true} & \quad \triangleright_\beta \\
(\lambda w.(\lambda y.\overline{false})^n w)\ \overline{true} & \quad \triangleright_\beta \\
(\lambda w.(\lambda y.\overline{false})^{n-1}((\lambda y.\overline{false})w))\ \overline{true} & \quad \triangleright_\beta \\
(\lambda w.(\lambda y.\overline{false})^{n-1}\ \overline{false})\ \overline{true} & \quad \triangleright_\beta \\
& \quad \ldots \\
(\lambda w.(\lambda y.\overline{false})\ \overline{false})\ \overline{true} & \quad \triangleright_\beta \\
(\lambda w.\overline{false})\ \overline{true} & \quad \triangleright_\beta \\
\overline{false} &
\end{aligned}
$$

Booleanos de Church

Expressões compostas - LEQ

Função que testa se o primeiro argumento é menor ou igual que o segundo:

$$\overline{leq} := \lambda x.\lambda y.\overline{zero}\ (\overline{sub}\ \overline{x}\ \overline{y}).$$

De fato:

$$\begin{aligned} (\lambda x.\lambda y.\overline{zero}\ (\overline{sub}\ \overline{x}\ \overline{y}))\ \overline{m}\ \overline{n} & \quad \triangleright_\beta \\ \overline{zero}\ (\overline{sub}\ \overline{m}\ \overline{n}) & \quad \triangleright_\beta \\ \overline{zero}\ (\overline{m-n}) & \end{aligned}$$

Booleanos de Church

Exercícios

Desenvolver expressões lambda para os seguintes operadores relacionais:

- $\overline{gt}$ (maior que);
- $\overline{equal}$ (igualdade);
- $\overline{notequal}$ (desigualdade).

Definição

Um termo P é dito "β-igual" ou "β-conversível" a um termo Q, denotado $P =_\beta Q$ se e somente se Q puder ser obtido a partir de P por uma seqüência finita (eventualmente vazia) de contrações-β, contrações-β reversas e mudanças de variáveis ligadas.
Ou seja, $P =_\beta Q$ se e somente se existir $P_0, ..., P_n (n \geq 0)$ tal que:

$$(\forall i \leq n-1), (P_i \rhd_{1\beta} P_{i+1}) \text{ ou } (P_{i+1} \rhd_{1\beta} P_i) \text{ ou } (P_i \equiv_\alpha P_{i+1}),$$

$$P_0 \equiv P,$$

$$P_n \equiv Q.$$

Definição

Exemplo

Sejam $P \equiv (\lambda xyz.xzy)(\lambda xy.x)$ e $Q \equiv (\lambda xy.x)(\lambda x.x)$.
Então $P =_\beta Q$, ou seja:

$$(\lambda xyz.xzy)(\lambda xy.x) =_\beta (\lambda xy.x)(\lambda x.x)$$

De fato, pode-se notar inicialmente que:

$$\begin{array}{rcl} (\lambda xyz.xzy)(\lambda xy.x) & \equiv_\alpha & (\lambda xyz.xzy)(\lambda uv.u) \\ & \rhd_{1\beta} & \lambda yz.(\lambda uv.u)zy \\ & \rhd_{1\beta} & \lambda yz.(\lambda v.z)y \\ & \rhd_{1\beta} & \lambda yz.z \end{array}$$

Definição

Exemplo

Além disso, que:

$$
\begin{array}{rcl}
(\lambda xy.x)(\lambda x.x) & \equiv_\alpha & (\lambda xy.x)(\lambda w.w) \\
 & \rhd_{1\beta} & \lambda y.(\lambda w.w) \\
 & \equiv & \lambda yw.w \\
 & \equiv_\alpha & \lambda yz.z
\end{array}
$$

Definição
Exemplo

Finalmente, pode-se considerar $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ tais que:

$$\begin{aligned}
P = P_0 &= (\lambda xyz.xzy)(\lambda xy.x)\\
P_1 &= (\lambda xyz.xzy)(\lambda uv.u)\\
P_2 &= \lambda yz.(\lambda uv.u)zy\\
P_3 &= \lambda yz.(\lambda v.z)y\\
P_4 &= \lambda yz.z\\
P_5 &= \lambda yw.w\\
P_6 &= (\lambda xy.x)(\lambda w.w)\\
Q = P_7 &= (\lambda xy.x)(\lambda x.x)
\end{aligned}$$

Para concluir que $P =_\beta Q$, basta observar que $P_0 \equiv_\alpha P_1$, $P_1 \rhd_{1\beta} P_2$, $P_2 \rhd_{1\beta} P_3$, $P_3 \rhd_{1\beta} P_4$, $P_4 \equiv_\alpha P_5$, $P_6 \rhd_{1\beta} P_5$ e $P_6 \equiv_\alpha P_7$.

Lemas

Lema: $P =_\beta Q, P \equiv_\alpha P', Q \equiv_\alpha Q' \Rightarrow P' =_\beta Q'$.

Lema: $M =_\beta M', N =_\beta N' \Rightarrow [N/x]M =_\beta [N'/x]M'$.

Teorema de Church-Rosser para $=_\beta$

Se $P =_\beta Q$, então existe um termo T tal que:

$$P \triangleright_\beta T \quad \text{e} \quad Q \triangleright_\beta T.$$

Dois termos β-conversíveis representam a mesma operação, uma vez que ambos podem ser reduzidos para o mesmo termo.

Corolários

Corolário: Se $P =_\beta Q$ e Q é uma forma normal-β, então $P \triangleright_\beta Q$

Corolário: Se $P =_\beta Q$, então ambos P e Q possuem a mesma forma normal-β ou então nenhum dos dois possui nenhuma forma normal-β.

Corolário: Se P e Q são formas normais-β e $P =_\beta Q$, então $P \equiv_\alpha Q$.

Corolário (*unicidade da forma normal*): Um termo é β-igual a no máximo uma forma normal-β, a menos de mudanças de variáveis ligadas.

Ponto fixo

Definição

O "ponto fixo" de uma função f é o valor x tal que $f(x) = x$. Ou seja, corresponde ao objeto que não se modifica pela aplicação da função. Uma função pode ter um, mais de um ou nenhum ponto fixo.

- A função $f(x) = x^2$ possui como pontos fixos os valores 0 e 1, pois $0^2 = 0$ e $1^2 = 1$;
- A função $f(x) = x + 1$ não possui nenhum ponto fixo, pois $f(x) \neq x, \forall x \geq 0$;
- A função $f(x) = x * 2$ possui como ponto fixo apenas o valor 0, pois $0 * 2 = 0$.

Ponto fixo

Existência

No Cálculo Lambda, é possivel demonstrar que todo termo possui um ponto fixo. Ou seja, para todo termo X existe um termo P, dependente de X, tal que:

$$XP =_\beta P.$$

Além disso, esse ponto fixo pode ser obtido pela aplicação de um operador Y, de tal forma que, para todo termo X, YX é um ponto fixo de X.

Ponto fixo

Teorema

No Cálculo Lambda, existe um operador Y tal que, para todo termo x,

$$Yx =_\beta x(Yx) \quad \text{e, mais forte ainda,} \quad Yx \rhd_\beta x(Yx).$$

Prova:

- Basta considerar $Y \equiv UU$, com $U \equiv \lambda ux.x(uux)$.

Esse termo foi inventado por Alan Turing em 1937, e também é conhecido por Y_{Turing}.

Ponto fixo

Teorema

De fato:

$$
\begin{array}{rcl}
Yx & \equiv & (\lambda u.\lambda x.x(uux))Ux \\
 & \rhd_\beta & [U/u](\lambda x.x(uux))x \\
 & \equiv & (\lambda x.x(UUx))x \\
 & \rhd_\beta & x(UUx) \\
 & \equiv & x(Yx)
\end{array}
$$

Ponto fixo

Teorema

Y_{Turing} não é o único operador de ponto fixo conhecido. Exsitem outros, entre os quais $Y_{Curry-Ros}$, inventado por Haskell Curry:

$$Y_{Curry-Ros} \equiv \lambda x.VV, V \equiv \lambda y.x(yy)$$

Exercício: provar que $Y_{Curry-Ros}$ é um operador de ponto fixo, ou seja, que $YX =_\beta X(YX)$ para todo termo X.

Ponto fixo

Corolário

O seguinte corolário decorre do teorema anterior: no Cálculo Lambda, para todo termo Z e $n \geq 0$, a equação $xy_1y_2...y_n = Z$, onde $x, y_1, y_2, ..., y_n$ são variáveis, pode ser resolvida para x. Ou seja, existe um termo X tal que:

$$[X/x](xy_1y_2...y_n) = [X/x]Z$$

ou seja:

$$Xy_1y_2...y_n = [X/x]Z.$$

Prova:
Basta escolher $X \equiv Y(\lambda xy_1y_2...y_n.Z)$.

Ponto fixo

Corolário

De fato:

$$
\begin{array}{rcl}
Xy_1y_2...y_n & \equiv & \underbrace{Y(\lambda xy_1y_2...y_n.Z)}_{YF}\,y_1y_2...y_n \\
& \rhd_\beta & \underbrace{(\lambda xy_1y_2...y_n.Z)(Y(\lambda xy_1y_2...y_n.Z))}_{F(YF)}\,y_1y_2...y_n \\
& \rhd_\beta & (\lambda y_1y_2...y_n.[Y(\lambda xy_1y_2...y_n.Z)/x]Z)y_1y_2...y_n \\
& \equiv & (\lambda y_1y_2...y_n.[X/x]Z)y_1y_2...y_n \\
& \rhd_\beta & (\lambda y_2...y_n.[X/x]Z)y_2...y_n \\
& ... & \\
& \rhd_\beta & [X/x]Z
\end{array}
$$

Ponto fixo

Aplicação

A importância desse corolário reside no fato de que ele permite a resolução de formulações recursivas, sendo útil na construção de termos lambda que representam as funções correspondentes. É importante observar:

- No Cálculo Lambda as funções são anônimas, ou seja, elas não são identificadas;
- Dessa maneira, não é possível representar diretamente funções que invocam a si mesmas;
- No entanto, a partir da equação de define a função recursiva em questão, o uso operador de ponto fixo permite obter a expressão lambda que representa tal função.

Definições recursivas

Exemplo - consumir argumento

Considere a definição recursiva:

$$xy =_\beta x.$$

Essa equação representa uma função que “engole” o seu argumento. Pela aplicação do corolário, a solução em x dessa equação é dada por:

$$X \equiv Y(\lambda x y_1 . Z) \equiv Y(\lambda x y . x)$$

Para isso, basta considerar $y_1 = y$ e $Z = x$. De fato:

$$\begin{array}{rcl} Y(\lambda xy.x)y & \rhd_\beta & (\lambda xy.x)(Y(\lambda xy.x))y \\ & \rhd_\beta & (\lambda y.(Y(\lambda xy.x))y \\ & \rhd_\beta & Y(\lambda xy.x) \end{array}$$

Definições recursivas
Exemplo - inverter argumentos

Considere a definição recursiva:

$$xyz =_\beta xzy.$$

Essa equação representa uma função que inverte a ordem dos seus dois argumentos. Pela aplicação do corolário, a solução em x dessa equação é dada por:

$$X \equiv Y(\lambda xy_1y_2.Z) \equiv Y(\lambda xyz.xzy)$$

Para isso, basta considerar $y_1 = y$, $y_2 = z$ e $Z = xzy$. De fato:

$$\begin{aligned} Y(\lambda xyz.xzy)yz &\triangleright_\beta (\lambda xyz.xzy)(Y(\lambda xyz.xzy))yz \\ &\triangleright_\beta Y(\lambda xyz.xzy)zy \end{aligned}$$

Definições recursivas

Exemplo - fatorial

Exemplo clássico de definição recursiva:

$$fat(n) = \begin{cases} 1 \text{ se } n = 0; \\ n * fat(n-1) \text{ se } n > 0. \end{cases}$$

Essa equação pode ser escrita como:

$$xy =_\beta \overline{if}\ (\overline{zero}\ y)\ \overline{1}\ (\overline{mult}\ y\ x\ (\overline{sub}\ y\ \overline{1}))$$

Definições recursivas

Exemplo - fatorial

A solução em x é obtida considerando-se $Y(\lambda x y_1.Z)$, onde:

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & y \\ Z & = & \overline{if}\ (\overline{zero}\ y)\ \overline{1}\ (\overline{mult}\ y\ x\ (\overline{sub}\ y\ \overline{1})) \end{array}$$

ou seja:

$$\overline{fat} \equiv Y\underbrace{(\lambda xy.(\underbrace{\overline{if}\ (\overline{zero}\ y)\ \overline{1}\ (\overline{mult}\ y\ (x\ (\overline{sub}\ y\ \overline{1})))}_{Z}))}_{F} \equiv YF$$

Definições recursivas

Exemplo - fatorial

Exemplo: $fat(3)$

$$
\begin{aligned}
Y F \; \overline{3} & \quad \triangleright_\beta \\
F(Y F) \; \overline{3} & \quad \triangleright_\beta \\
(\lambda y.\ \overline{if} \; (\overline{zero} \; y) \; \overline{1} \; (\overline{mult} \; y \; ((Y F)(\overline{sub} \; y \; \overline{1})))) \; \overline{3} & \quad \triangleright_\beta \\
\overline{if} \; (\overline{zero} \; \overline{3}) \; \overline{1} \; (\overline{mult} \; \overline{3} \; ((Y F)(\overline{sub} \; \overline{3} \; \overline{1}))) & \quad \triangleright_\beta \\
\overline{mult} \; \overline{3} \; ((Y F) \; \overline{2}) & \quad \triangleright_\beta \\
\overline{mult} \; \overline{3} \; (F(Y F) \; \overline{2}) & \quad \triangleright_\beta \\
\overline{mult} \; \overline{3} \; (\overline{mult} \; \overline{2} \; ((Y F) \; \overline{1})) & \quad \triangleright_\beta
\end{aligned}
$$

Definições recursivas

Exemplo - fatorial

continuação:

$$
\begin{array}{rl}
\overline{mult}\ \overline{3}\ (\overline{mult}\ \overline{2}\ (F(Y F)\ \overline{1})) & \triangleright_\beta \\
\overline{mult}\ \overline{3}\ (\overline{mult}\ \overline{2}\ (\overline{mult}\ \overline{1}\ ((Y F)\ \overline{0}))) & \triangleright_\beta \\
\overline{mult}\ \overline{3}\ (\overline{mult}\ \overline{2}\ (\overline{mult}\ \overline{1}\ (F(Y F)\ \overline{0}))) & \triangleright_\beta \\
\overline{mult}\ \overline{3}\ (\overline{mult}\ \overline{2}\ (\overline{mult}\ \overline{1}\ \overline{1})) & \triangleright_\beta \\
\overline{mult}\ \overline{3}\ (\overline{mult}\ \overline{2}\ \overline{1}) & \triangleright_\beta \\
\overline{mult}\ \overline{3}\ \overline{2} & \triangleright_\beta \\
\overline{6} &
\end{array}
$$

Definições recursivas

Exercício

Obter uma expressão lambda que calcula o n-ésimo termo da seqüência de Fibonacci: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$

$$\begin{cases} f(1) = 0; \\ f(2) = 1; \\ f(n) = f(n-1) + f(n-2) \text{ para } n \geq 3. \end{cases}$$

História

- Os primeiros resultados acerca da indecidbilidade em toda a história foram descobertos por Church através do Cálculo Lambda;
- Eles tratam da inexistência de algoritmos para determinar (i) se duas expressões lambdas satisfazem à relação $=_\beta$ (isto é, se elas representam a mesma operação) e (ii) determinar se uma expressão lambda possui forma normal ou não;
- A partir desses resultados, Church foi capaz de deduzir a indecidibilidade da lógica de predicados pura de primeira ordem em 1936.

História

- Com isso, ele respondeu uma questão formulada por David Hilbert anos antes (*Entscheidungsproblem*);
- *Entscheidungsproblem*: determinar a existência de um algoritmo que decide se uma certa afirmação pode ser provada a partir de axiomas usando as regras da lógica;
- A demonstração a seguir foi feita por Dana Scott em 1963 e redescoberta independentemente por Curry em 1972.

Número de Gödel

- Para um certo termo X, o "número de Gödel" desse termo, denotado,

$$gd(X)$$

  é o numero natural que representa, de forma unívoca, o termo X;
- A codificação é feita de tal forma que X pode ser obtido a partir de $gd(X)$, ou seja, a função de codificação é injetora;
- O algoritmo usado por Gödel é baseado do Teorema Fundamental da Aritmética, que atribui números diferentes para os símbolos do alfabeto, e depois utiliza o produto de números primos para obter uma representação única para cada sentença formada por tais símbolos;
- Existem outras maneiras de se fazer tal codificação.

Numeral de Church do Número de Gödel

O "Numeral de Church do Número de Gödel" de um termo X, denotado:

$$\lceil X \rceil$$

é definido como sendo o Numeral de Church correspondente ao Número de Gödel associado ao termo X, ou seja,

$$\lceil X \rceil \equiv \overline{gd(X)}$$

Numeral de Church do Número de Gödel

Observar que:

- X é um termo;
- $gd(X)$ é um número natural;
- $\lceil X \rceil$ é um termo;

Exemplo:
Suponha que $X \equiv uv$ e que $gd(uv) = 5$. Então:

$$\lceil uv \rceil \equiv \lambda x.\lambda y.x(x(x(x(xy))))$$

.

Funções auxiliares

Admite-se a existência das seguintes funções auxiliares:

- $\tau(gd(X), gd(Y)) = gd((XY))$;
  Obtém o Número de Gödel de uma expressão composta a partir da composição dos Números de Gödel das expressões componentes;
- $\nu(n) = gd(\overline{n})$;
  Obtém o Número de Gödel de um número inteiro representado como Numeral de Church.

E considera-se que as mesmas sejam representadas, respectivamente, por expressões lambda correspondentes:

- $\overline{\tau} := T$, de tal forma que $T\lceil X\rceil\lceil Y\rceil =_\beta \lceil (XY)\rceil$;
- $\overline{\nu} := N$, de tal forma que $N\overline{n} =_\beta \lceil\overline{n}\rceil$.

Conjuntos recursivamente separáveis

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dois conjuntos de números naturais quaisquer. Esse par de conjuntos é dito "recursivamente separável" se e somente se existir uma função total ϕ, definida sobre o domínio $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, tal que:

$$n \in \mathcal{A} \Rightarrow \phi(n) = 0$$

$$n \in \mathcal{B} \Rightarrow \phi(n) = 1$$

ou seja, o par $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ é recursivamente separável se e somente se (i) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ e (ii) existir um algoritmo que decida se um número qualquer pertencente à $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ pertence à $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$.

Conjuntos recursivamente separáveis

Sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ dois conjuntos de expressões lambda quaisquer e suponha que:

$$X \in \mathcal{P} \Leftrightarrow gd(X) \in \mathcal{A}$$

e

$$X \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow gd(X) \in \mathcal{B}$$

ou seja, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ contém, respectivamente, os Números de Gödel das expressões contidas em $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$.

- Diz-se que $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são recursivamente separáveis se e somente se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ também o forem;
- Um conjunto $\mathcal{A}$ (de expressões ou de números) é dito "recursivo" ou "decidível" se $\mathcal{A}$ e o seu complemento forem recursivamente separáveis.

Fechamento na igualdade-β

Um conjunto de termos $\mathcal{A}$ é dito "fechado em relação à operação de conversão (ou igualdade)" se e somente se, para todos os termos X e Y:

$$(X \in \mathcal{A} \;\; \text{e} \;\; X =_\beta Y) \Rightarrow (Y \in \mathcal{A})$$

Teorema da Indecidibilidade de Scott-Curry

“Nenhum par de conjuntos de termos lambda que sejam (i) não-vazios e (ii) fechados em relação à operação de conversão, é recursivamente separável.”

Teorema da Indecidibilidade de Scott-Curry

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dois conjuntos de termos não-vazios e fechados em relação à operação de conversão. Suponhamos que eles sejam recursivamente separáveis, ou seja, que exista uma função total ϕ tal que:

$$X \in \mathcal{A} \Rightarrow \phi(gd(X)) = 0$$

$$X \in \mathcal{B} \Rightarrow \phi(gd(X)) = 1$$

Logo[1], existe um termo F que representa ϕ. Ou seja,

$$X \in \mathcal{A} \Rightarrow F\lceil X \rceil =_\beta \overline{0}$$

$$X \in \mathcal{B} \Rightarrow F\lceil X \rceil =_\beta \overline{1}$$

[1] A equivalência entre funções recursivas totais e expressões lambda é demonstrada no capítulo 4 do livro de Hindley/Seldin.

Teorema da Indecidibilidade de Scott-Curry

Sejam A e B dois termos tais que $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$ e considere-se o termo J, construído a partir de A e B, de seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl} J & \equiv & H\lceil H \rceil \\ H & \equiv & \lambda y.\mathbf{D}BA(F(Ty(Ny))) \end{array}$$

com $\mathbf{D} \equiv \lambda xyz.z(\mathbf{K}y)x$ e $\mathbf{K} \equiv \lambda xy.x$. $\mathbf{D}$ recebe três argumentos e retorna o primeiro se o terceiro for 0 ou o segundo se o terceiro for 1 (na verdade, qualquer valor maior que 0). Ou seja,

$$\mathbf{D}BA\overline{0} =_\beta B$$

$$\mathbf{D}BA\overline{1} =_\beta A$$

Teorema da Indecidibilidade de Scott-Curry

De fato:

$$\begin{array}{rcl}
\mathsf{D}BA\overline{0} & \equiv & (\lambda xyz.z(\mathsf{K}y)x)BA\ \overline{0} \\
& =_\beta & \overline{0}\ (\mathsf{K}A)B \\
& =_\beta & B
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\mathsf{D}BA\overline{1} & \equiv & (\lambda xyz.z(\mathsf{K}y)x)BA\ \overline{1} \\
& =_\beta & \overline{1}\ (\mathsf{K}A)B \\
& \equiv & (\lambda x.\lambda y.xy)(\mathsf{K}A)B \\
& =_\beta & (\lambda y.(\mathsf{K}A)y)B \\
& =_\beta & (\mathsf{K}A)B \\
& =_\beta & A
\end{array}$$

Teorema da Indecidibilidade de Scott-Curry

Por outro lado, é possível demonstrar (slide seguinte) que:

$$J =_\beta \mathbf{D}BA(F\lceil J \rceil)$$

Logo, $J =_\beta A$ ou $J =_\beta B$. Como $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$ e, além disso, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são fechados em relação à igualdade beta, podemos concluir que o termo J deve necessariamente pertencer à um destes dois conjuntos. Ou seja, o termo J pertence ao domínio da função ϕ (F).

Teorema da Indecidibilidade de Scott-Curry

$$
\begin{array}{rcl}
J & \equiv & H\lceil H\rceil \\
 & \equiv & (\lambda y.\mathbf{D}BA(F(Ty(Ny))))\lceil H\rceil \\
 & =_\beta & \mathbf{D}BA(F(T\lceil H\rceil(\underbrace{N\lceil H\rceil}))) \\
 & =_\beta & \mathbf{D}BA(F(\underbrace{T\lceil H\rceil\underbrace{\lceil\lceil H\rceil\rceil}_{2}})) \\
 & =_\beta & \mathbf{D}BA(F\underbrace{\lceil H\lceil H\rceil\rceil}_{3}) \\
 & \equiv & \mathbf{D}BA(\underbrace{F\lceil J\rceil}_{4})
\end{array}
$$

---

[2] Pela definição de N.
[3] Pela definição de T.
[4] Pela definição de J.

Teorema da Indecidibilidade de Scott-Curry

Seja $j = gd(J)$.
Então, de acordo com a hipótese, $\phi(j) = 0$ ou $\phi(j) = 1$.
Suponhamos que $\phi(j) = 0$.
Logo:

$$\begin{array}{rcl} \phi(j) = 0 & \Rightarrow & F\lceil J \rceil =_\beta \overline{0} \\ & \Rightarrow & J =_\beta B \\ & \Rightarrow & J \in \mathcal{B} \\ & \Rightarrow & \phi(j) = 1 \end{array}$$

Teorema da Indecidibilidade de Scott-Curry

Suponhamos, por outro lado, que $\phi(j) = 1$.
Portanto:

$$\begin{array}{rcl} \phi(j) = 1 & \Rightarrow & F\lceil J \rceil =_\beta \overline{1} \\ & \Rightarrow & J =_\beta A \\ & \Rightarrow & J \in \mathcal{A} \\ & \Rightarrow & \phi(j) = 0 \end{array}$$

Teorema da Indecidibilidade de Scott-Curry

Conclusão:

- Qualquer que seja o caso ($\phi(j) = 0$ ou $\phi(j) = 1$) temos uma contradição;
- Logo, a hipótese não pode ser verdadeira e os conjuntos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ não são recursivamente separáveis.

Teorema da Indecidibilidade de Scott-Curry

Corolários

- *Se $\mathcal{A}$ é um conjunto de termos fechado em relação à operação de conversão, e tanto $\mathcal{A}$ quanto o seu complemento são não-vazios, então $\mathcal{A}$ não é decidível;*
  Basta considerar como $\mathcal{B}$ o complemento de $\mathcal{A}$, ou seja, o conjunto dos termos que não pertecem à $\mathcal{A}$;
  $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são fechados em relação à operação de conversão e não-vazios.

  Conclusão:
  Não existe algoritmo para determinar se um certo termo pertence ou não pertence à um conjunto de termos fechado em relação à operação de conversão.

Teorema da Indecidibilidade de Scott-Curry

Corolários

- *O conjunto de todos os termos que possuem forma normal não é decidível;*
  Basta considerar esse conjunto como $\mathcal{A}$ e o seu complemento (termos que não possuem formas normais) como $\mathcal{B}$;
  $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são fechados em relação à operação de conversão e não-vazios.

  Conclusão:
  Não existe algoritmo para determinar se um certo termo possui ou não possui forma normal.

Teorema da Indecidibilidade de Scott-Curry

Corolários

- *A relação $=_\beta$ não é decidível, ou seja, não existe função total ψ tal que:*

$$X =_\beta Y \Rightarrow \psi(gd(X), gd(Y)) = 0$$

$$X \neq_\beta Y \Rightarrow \psi(gd(X), gd(Y)) = 1$$

Basta considerar $\mathcal{A}$ como o conjunto de termos conversível a um certo termo em particular (por exemplo, Y), e $\mathcal{B}$ como o seu complemento; $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são fechados em relação à operação de conversão e não-vazios.

Conclusão:
Não existe algoritmo para determinar se dois termos representam a mesma operação.