TEORIA DA COMPUTAÇÃO

Prova 3 – 05/10/2017 – Prof. Marcus Ramos

1ª Questão (2,0 pontos): Provar que toda linguagem é decidida por uma Máquina de Turing de tempo polinomial se e somente se ela possuir um verificador de tempo polinomial.

- Suponha que L é decidida por uma MT M de tempo polinomial. Neste caso, o verificador pode ser obtido simulando-se a máquina M e guiando-se as escolhas não-determinísticas da possível solução em M para que o sorteio coincida com o certificado fornecido; a partir daí, basta simular M com esta entrada e fornecer, na saída, o mesmo resultado de M.
- Para construir uma Máquina de Turing M que decide L a partir de um verificador V para L, basta fazer com que M gere todas as possíveis soluções, e teste cada uma em delas em V. Em outras palavras, M gera todas as possíveis soluções e usa V para testá-las individualmente.

2ª Questão (1,5 ponto): Como se relacionam os conjuntos P e NP?

P é o conjunto dos problemas que podem ser decididos por Máquinas de Turing determinísticas de tempo polinomial. NP é o conjunto dos problemas que podem ser decididos por Máquinas de Turing não-determinísticas de tempo polinomial. Como toda Máquina de Turing determinística de tempo polinomial é também uma Máquina de Turing não-determinística de tempo polinomial, segue que $P \subseteq NP$. Por outro lado, não se sabe ainda se $P = NP$ ou $P \neq NP$. Em outras palavras, ainda não sabemos se os problemas para os quais são conhecidos apenas algoritmos de tempo exponencial também possuem algoritmos de tempo polinomial.

3ª Questão (1,5 ponto): Provar que, se A reduz em tempo polinomial para B, e $B \in P$, então $A \in P$.

Basta provar que A pode ser decidido em tempo polinomial. Para isso, é suficiente combinar a redução de tempo polinomial de A para B com a decisão de tempo polinomial de B (uma vez que $B \in P$). Se f é a redução e $f(w) \in B$, então $w \in A$. Se $f(w) \notin B$, então $w \notin A$. Em qualquer caso, temos um decisor de tempo polinomial para A.

4ª Questão (2,0 pontos): Complete a tabela abaixo, de tal forma que o resultado corresponda às regras de substituição do cálculo lambda. Suponha que N, P, Q sejam termos lambda, x, y variáveis e a um átomo, $a \neq x$.

$[N/x]x \equiv \ldots$
$[N/x]a \equiv \ldots$
$[N/x]PQ \equiv \ldots$
$[N/x](\lambda x.P) \equiv \ldots$
$[N/x](\lambda y.P) \equiv \ldots$

Os quatro primeiros casos são:

- $[N/x]x \equiv N$
- $[N/x]a \equiv a$
- $[N/x]PQ \equiv [N/x]P[N/x]Q$
- $[N/x](\lambda x.P) \equiv \lambda x.P$

O quinto caso se desdobra em três:

- $[N/x](\lambda y.P) \equiv \lambda y.P$, se $x \notin FV(P)$
- $[N/x](\lambda y.P) \equiv \lambda y.[N/x]P$, se $x \in FV(P)$ e $y \notin FV(N)$
- $[N/x](\lambda y.P) \equiv \lambda z.[N/x][z/y]P$, se $x \in FV(P)$ e $y \in FV(N)$. Nste caso, deve-se escolher z tal que $z \notin FV(NP)$.

5ª Questão (1,5 ponto): Provar que $\overline{add}\ \bar{2}\ (\overline{mult}\ \bar{2}\ \bar{2}) \rhd_\beta \bar{6}$. Considere $\overline{add} \equiv \lambda uvxy.ux(vxy)$ e $\overline{mult} \equiv \lambda uvx.u(vx)$ e lembre-se que $\bar{n} \equiv \lambda xy.x^n y$.

$\overline{mult}\ \bar{2}\ \bar{2} \equiv$
$\big(\lambda uvx.u(vx)\big)\ \bar{2}\ \bar{2} \rhd_\beta$
$\lambda x.\bar{2}(\bar{2}x) \equiv$
$\lambda x.(\lambda xy.x(xy))(\bar{2}x) \rhd_\beta$
$\lambda x.\lambda y.(\bar{2}x)((\bar{2}x)y) \rhd_\beta$
$\lambda x.\lambda y.(\bar{2}x)(x^2 y) \rhd_\beta$
$\lambda x.\lambda y.x^2(x^2 y) \equiv$
$\lambda x.\lambda y.x^4 y \equiv$
$\bar{4}$

$\overline{add}\ \bar{2}\ \bar{4} \equiv$
$(\lambda uvxy.ux(vxy))\ \bar{2}\ \bar{4} \rhd_\beta$
$\lambda xy.\bar{2}x(\bar{4}xy) \rhd_\beta$
$\lambda xy.\bar{2}x(x^4 y) \rhd_\beta$
$\lambda xy.x^2(x^4 y) \equiv$
$\lambda xy.x^6 y \equiv$
$\bar{6}$

6ª Questão (1,5 ponto): Provar que $Y_{CR} \equiv \lambda x.VV$, com $V \equiv (\lambda y.x(yy))$, é um operador de ponto fixo. Ou seja, para qualquer termo lambda X, $Y_{CR}X =_\beta X(Y_{CR}X)$.

$Y_{CR}X \equiv$
$(\lambda x.VV)X \rhd_\beta$
$([X/x])V[X/x]V \equiv$
$\big(\lambda y.X(yy)\big)\big(\lambda y.X(yy)\big) \rhd_\beta$
$[\lambda y.X(yy)/y](X(yy)) \rhd_\beta$
$X((\lambda y.X(yy))(\lambda y.X(yy)))$

Por outro lado, sabemos (acima) que:

$Y_{CR}X \rhd_\beta$
$\big(\lambda y.X(yy)\big)\big(\lambda y.X(yy)\big)$

Logo, temos $Y_{CR}X =_\beta X(Y_{CR}X)$ como queríamos demonstrar.