TEORIA DA COMPUTAÇÃO

Prova 3 – 26/04/2017 – Prof. Marcus Ramos

Questão 1 (2,0 pontos): Qual a diferença fundamental que existe entre a redução definida Teoria da Computabilidade e a redução que é definida na Teoria da Complexidade? O que justifica esta diferença?

Na Teoria da Computabilidade, uma redução é apenas uma função total (não necessariamente injetora nem sobrejetora) que mapeia duas linguagens ou problemas. Não há requisitos sobre o tempo em que é feita esta redução. Na Teoria da Complexidade o tempo é relevante, e consideramos apenas funções de tempo polinomial com o tamanho da entrada. Desta forma, é possível garantir a existência de solução de tempo polinomial para um problema que pode ser reduzido em tempo polinomial para outro problema para o qual já se conhece uma solução de tempo polinomial. A combinação da redução com a solução conhecida é também de tempo polinomial, e portanto eficiente.

Questão 2 (1,5 ponto): Prove que se um problema P_1 é NP-completo, e ele reduz em tempo polinomial para outro problema P_2, então P_2 é NP-hard (ou NP-difícil).

Pela aplicação direta das definições: se P_1 é NP-completo, isto significa que todos os problemas de NP reduzem em tempo polinomial para ele. Por outro lado, se existe uma redução de tempo polinomial de P_1 para P_2, então a combinação de cada uma das reduções de tempo polinomial anteriores com esta redução é também de tempo polinomial. Logo, todos os problemas de NP reduzem em tempo polinomial também para P_2. Logo, pela definição, P_2 é NP-hard.

Questão 3 (1,5 ponto): O que acontece se algum dia alguém apresentar um algoritmo de tempo polinomial que resolve CLIQUE?

Como CLIQUE é um problema NP-completo, se algum dia alguém encontrar uma solução de tempo polinomial para ele, então todos os problemas de NP também terão solução de tempo polinomial e P=NP.

Questão 4 (2,0 pontos): Defina os seguintes termos do Cálculo Lambda:

- Aplicação;

  Representa a chamada de uma função com os respectivos argumentos. Se M e N são termos lambda, então (MN) também é um termo lamba e representa a aplicação de M a N.

- Abstração;

Definição de função, com seus parâmetros e o seu corpo. Se x é uma variável e M é um termo lambda, então $\lambda x. M$ também é um termo lambda e representa a abstração de M em x.

- Substituição;

  Denotada $[N/x]M$, representa a substituição de toda ocorrência livre de x em M por N. Sete regras diferentes são usadas, dependendo da estrutura do termo M.

- Redução-beta;

  Corresponde à transformação do termo $(\lambda x. M)N$ no termo correspondente $[N/x]M$. O termo $(\lambda x. M)N$ recebe o nome de $\beta - redex$ e o termo $[N/x]M$ recebe o nome de $contractum$. A transformação é denotada $(\lambda x. M)N \rhd_\beta [N/x]M$.

- Igualdade-beta.

  Diz-se que $M =_\beta N$ se e somente se existir uma seqüência finita de conversões-alpha, reduções-beta e reduções-beta inversas que permitam transformar M em N.

Questão 5 (1,5 ponto): Números ímpares podem ser identificados através da seguinte definição recursiva, que retorna 1 quando o argumento é ímpar e 0 quando ele é par:

$$ímpar\ (x) = \begin{cases} se\ x = 0\ então\ 0 \\ se\ x = 1\ então\ 1 \\ se\ (x > 1)\ então\ ímpar\ (x - 2) \end{cases}$$

Obtenha, a partir desta definição recursiva, um termo lambda que determina se um número é ímpar ou não. Considere dados os termos $zero$, sub, if e o operador de ponto fixo Y.

Montagem da equação a partir da definição recursiva:
$xy =_\beta if\ (zero\ y)\ 0\ (if\ (zero\ (sub\ y\ 1))\ 1\ (x\ (sub\ y\ 2)))$
Solução em x usando o operador de ponto fixo Y:
$ímpar \equiv Y(\lambda xy. if\ (zero\ y)\ 0\ (if\ (zero\ (sub\ y\ 1))\ 1\ (x\ (sub\ y\ 2))))$

Questão 6 (1,5 ponto): Usando o termo lambda da questão anterior, prove que $ímpar\ 3 \rhd_\beta 1$.

Considere $I \equiv (\lambda xy. if\ (zero\ y)\ 0\ (if\ (zero\ (sub\ y\ 1))\ 1\ (x\ (sub\ y\ 2))))$.
Então,
$ímpar\ 3 \equiv$
$(YI)\ 3 \rhd_\beta$
$I\ (YI)\ 3 \equiv$
$(\lambda xy. if\ (zero\ y)\ 0\ (if\ (zero\ (sub\ y\ 1))\ 1\ (x\ (sub\ y\ 2))))\ (YI)\ 3 \rhd_\beta$

$if\ \big(zero\ (sub\ 3\ 1)\big)\ 1\ ((YI)\ (sub\ 3\ 2))\ \rhd_\beta$

$if\ (zero\ 2)\ 1\ ((YI)\ (sub\ 3\ 2))\ \rhd_\beta$

$(YI)\ 1\ \rhd_\beta$

$I\ (YI)\ 1\ \rhd_\beta$

$\Big(\lambda xy.if\ (zero\ y)\ 0\ \Big(if\ \big(zero\ (sub\ y\ 1)\big)1\ \big(x\ (sub\ y\ 2)\big)\Big)\Big)\ (YI)\ 1\ \rhd_\beta$

$if\ \big(zero\ (sub\ 1\ 1)\big)\ 1\ ((YI)\ (sub\ 1\ 2))\ \rhd_\beta$

$if\ (zero\ 0)\ 1\ ((YI)\ (sub\ 1\ 2))\ \rhd_\beta$

1