

Decidibilidade

Prof. Marcus Vinícius Midená Ramos

Universidade Federal do Vale do São Francisco

25 de maio de 2012

`marcus.ramos@univasf.edu.br`
`www.univasf.edu.br/~marcus.ramos`

Básica:

- ▶ *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation (capítulo 9)*
J. E. Hopcroft, R. Motwani e J. D. Ullman
Addison-Wesley, 2007, 3ª edição
- ▶ *Introdução à Teoria da Computação (capítulos 4 e 5)*
M. Sipser
Thomson, 2006, 2ª edição

Complementar:

- ▶ *Languages and Machines (capítulo 12)*
T. A. Sudkamp
Addison-Wesley, 2006, 3ª edição

Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Problemas decidíveis
- 3 Linguagem L_d
- 4 Complemento de linguagens
- 5 Máquina de Turing Universal
- 6 Linguagem L_u
- 7 Redutibilidade
- 8 Problema da parada
- 9 Linguagens L_e e L_{ne}
- 10 Teorema de Rice
- 11 Autômato Linearmente Limitado
- 12 Problemas indecidíveis e histórias de computação
- 13 PCP
- 14 Problemas relacionados com GLCs e LLCs

Questões

- ▶ Existe um algoritmo que resolve um certo problema?
- ▶ Como demonstrar que existe — ou que não existe — tal algoritmo?

Definições

- ▶ Decidibilidade é o estudo dos problemas codificados como linguagens;
- ▶ Máquinas de Turing são usadas como representação formal da noção de algoritmo;
- ▶ A prova da existência (ou não) de um algoritmo que resolve um certo problema é equivalente à demonstração da existência (ou não) de uma Máquina de Turing que resolve o mesmo problema.

Problema de decisão

Conceito

- ▶ Um problema é dito um “problema de decisão” quando ele é transformado num problema equivalente, cujas respostas são apenas SIM ou NÃO;
- ▶ A coleção das instâncias de um problema de decisão cujas respostas são apenas afirmativas forma a linguagem que representa o referido problema;
- ▶ Necessidade de se codificar as instâncias do problema de forma unívoca.

Problema de decisão

Essência

- ▶ Determinar se a linguagem que representa um problema de decisão é recursiva.
 - ▶ Em caso afirmativo, existe um algoritmo (melhor caso);
 - ▶ Em caso negativo, investigar se a linguagem é recursivamente enumerável.
- ▶ Determinar se a linguagem que representa um problema de decisão é recursivamente enumerável.
 - ▶ Em caso afirmativo, é possível determinar as instâncias afirmativas do problema, mas haverá sempre pelo menos uma entrada (cuja resposta é negativa) que nunca produzirá resposta;
 - ▶ Em caso negativo, haverá sempre pelo menos uma entrada (cuja resposta é positiva) que nunca produzirá resposta (pior caso);

Problema de decisão

Exemplo

- ▶ Problema P : determinar se um número binário é par.
- ▶ Problema de decisão equivalente P' : agrupar os números binários que são pares (resposta afirmativa ao problema) e formar uma linguagem L com eles.
- ▶ $L = \{0, 10, 100, 110, 1000, 1010, 1100, 1110, \dots\}$. Note que os números ímpares (1, 01, 11 etc) não pertencem à L ;

Problema de decisão

Exemplo

- ▶ A resposta ao problema P — determinar se um número binário é par — é transformada na resposta à pergunta: “o número binário fornecido pertence à linguagem L ?”
- ▶ Genericamente, pretende-se determinar se existe uma Máquina de Turing M que sempre pára e é capaz de decidir se uma cadeia qualquer de zeros e uns pertence à linguagem L ;
- ▶ Caso exista tal máquina, isso implica a existência de um algoritmo que resolve P e diz-se que M “decide” P . Caso contrário, não existe tal algoritmo.

Problema de decisão

Exemplos

Suponha que $c(X)$ representa uma codificação de X sobre um certo alfabeto Σ .

- ▶ Dadas duas gramáticas livres de contexto G_1 e G_2 , é possível determinar se $L(G_1) = L(G_2)$?
 - ▶ Codificar G_1 e G_2 de forma adequada;
 - ▶ Considerar a linguagem $\{c(G_1)c(G_2) \mid L(G_1) = L(G_2)\}$
 - ▶ Determinar se essa linguagem é recursiva.
- ▶ Dadas uma Máquina de Turing M e uma entrada w , é possível determinar se M aceita w ?
 - ▶ Codificar M e w de forma adequada;
 - ▶ Considerar a linguagem $\{c(M)c(w) \mid M \text{ aceita } w\}$
 - ▶ Determinar se essa linguagem é recursiva.

Conceitos

- ▶ Um problema de decisão é dito “decidível” (ou “solucionável”) se a linguagem que representa as instâncias afirmativas do problema forma uma linguagem recursiva. Caso contrário o problema é dito “não-decidível” (“indecidível” ou “não-solucionável”).
- ▶ Como linguagens recursivas são reconhecidas por Máquinas de Turing que sempre param, qualquer que seja a entrada, a existência de um algoritmo que resolve um problema de decisão implica a existência de uma Máquina de Turing que sempre pára, qualquer que seja a entrada fornecida.

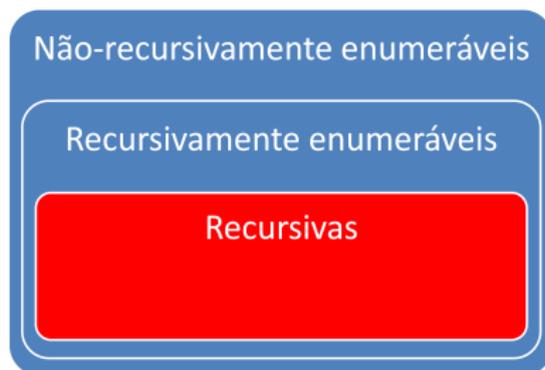
Conceitos

- ▶ Problemas de decisão que formam linguagens recursivamente enumeráveis e não-recursivas são aceitos por Máquinas de Turing que entram em loop para pelo menos uma instância do problema de decisão cuja resposta é negativa;
- ▶ Problemas de decisão que formam linguagens não-recursivamente enumeráveis não são aceitos por nenhuma Máquina de Turing que pare sempre que as instâncias são afirmativas.

Definições

Solucionável × Não-solucionável

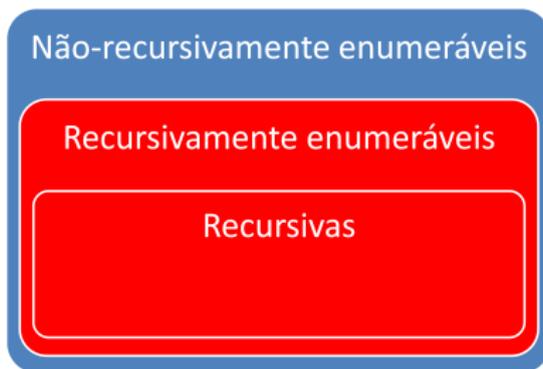
- ▶ Problema solucionável \Leftrightarrow Linguagem recursiva
- ▶ Problema não-solucionável \Leftrightarrow Linguagem não-recursiva



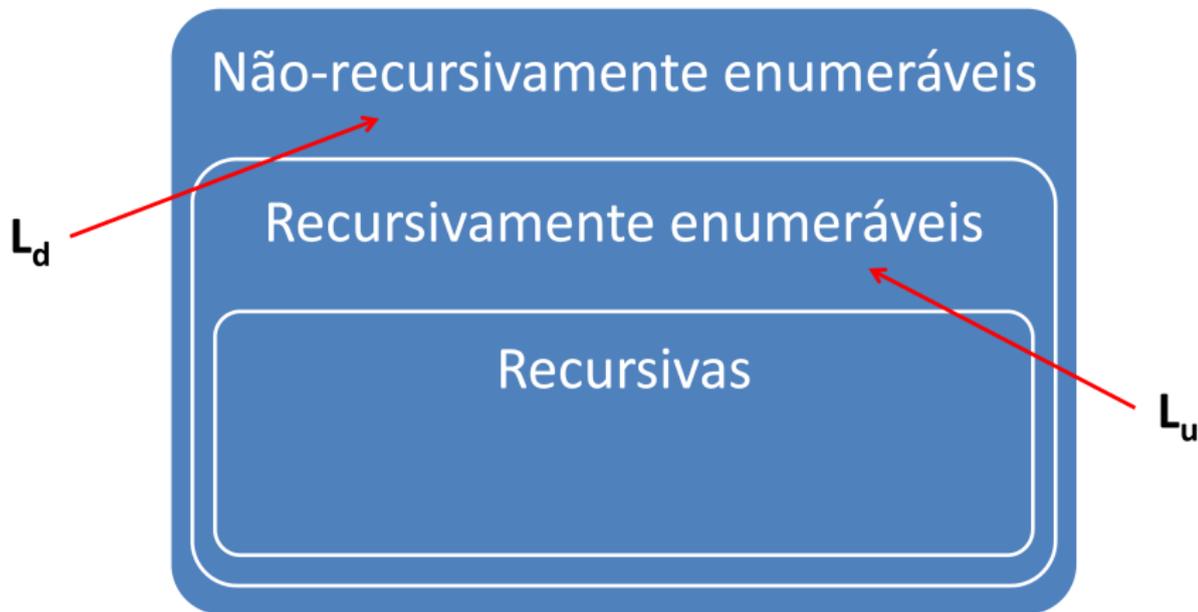
Definições

Parcialmente solucionável \times Totalmente insolúvel

- ▶ Problema parcialmente solucionável \Leftrightarrow Linguagem recursivamente enumerável
- ▶ Problema totalmente insolúvel \Leftrightarrow Linguagem não-recursivamente enumerável



Conceitos



Motivação

Por que estudar decidibilidade?

- ▶ Ajuda a identificar problemas insolúveis;
- ▶ Evita desperdício de tempo e esforço com a tentativa de resolução de problemas insolúveis;
- ▶ Aponta para possibilidades de simplificações e/ou alterações do problema original, a fim de que ele se torne solúvel;
- ▶ Amplia a sua compreensão sobre a natureza, as possibilidades e os limites da computação.

Seqüência

- 1 Problemas decidíveis;
- 2 Problemas indecidíveis;
- 3 Técnicas para classificar problemas de natureza originalmente desconhecida como sendo decidíveis ou indecidíveis.

Problema A_{AFD}

Aceitação em autômatos finitos determinísticos sem transições em vazio:

$$A_{AFD} = \{\langle B, w \rangle \mid B \text{ é um AFD que aceita a cadeia } w\}$$

Teorema: A_{AFD} é uma linguagem decidível.

Prova:

- 1 Construir uma MT M que analisa $\langle B \rangle$;
- 2 Se $\langle B \rangle$ não representa um AFD válido, M pára e rejeita a entrada;
- 3 Se $\langle B \rangle$ representa um AFD válido, M simula B com a entrada w ;
- 4 Se B pára numa configuração final, então M pára e aceita;
- 5 Se B pára numa configuração não-final, então M pára e rejeita.

Problema A_{AFN}

Aceitação em autômatos finitos
não-determinísticos com transições em vazio:

$$A_{AFN} = \{\langle B, w \rangle \mid B \text{ é um AFN que aceita a cadeia } w\}$$

Teorema: A_{AFN} é uma linguagem decidível.

Prova:

- 1 Construir uma MT M que analisa $\langle B \rangle$;
- 2 Se $\langle B \rangle$ não representa um AFN válido, M pára e rejeita a entrada;
- 3 Se $\langle B \rangle$ representa um AFN válido, M converte o AFN B para um AFD B' equivalente;
- 4 M simula B' com a entrada w ;
- 5 Se B' pára numa configuração final, então M pára e aceita;
- 6 Se B' pára numa configuração não-final, então M pára e rejeita.

Problema A_{GLC}

O algoritmo usado para demonstrar a decidibilidade de A_{AFD} não se aplica. A existência de um ciclo formado por transições em vazio no autômato finito pode fazer com que a simulação entre em loop infinito e, portanto, não consiga produzir uma resposta.

Problema A_{EXR}

Geração de cadeia por expressão regular:

$$A_{EXR} = \{\langle R, w \rangle \mid R \text{ é uma expressão regular que gera a cadeia } w\}$$

Teorema: A_{EXR} é uma linguagem decidível.

Prova:

- 1 Construir uma MT M que analisa $\langle R \rangle$;
- 2 Se $\langle R \rangle$ não representa uma expressão regular válida, M pára e rejeita;
- 3 Se $\langle R \rangle$ representa uma expressão regular válida, M converte R para um AFN B que reconhece a mesma linguagem;
- 4 M converte o AFN B para um AFD B' equivalente;
- 5 M simula B' com a entrada w ;
- 6 Se B' pára numa configuração final, então M pára e aceita;
- 7 Se B' pára numa configuração não-final, então M pára e rejeita.

Problema V_{AFD}

Vacuidade da linguagem reconhecida por autômato finito determinístico:

$$V_{AFD} = \{\langle B \rangle \mid B \text{ é um AFD e } L(B) = \emptyset\}$$

Teorema: V_{AFD} é uma linguagem decidível.

Prova:

- 1 Marcar o estado inicial de B ;
- 2 Repetir até que nenhum novo estado venha a ser marcado:
 - ▶ Marque todos os estados de destino para os quais existam transições partindo de um estado já marcado;
- 3 Se nenhum estado final estiver marcado, páre e aceite; caso contrário, páre e rejeite.

Problema EQ_{AFD}

Igualdade das linguagens reconhecidas por dois autômatos finitos determinísticos:

$$EQ_{AFD} = \{ \langle A, B \rangle \mid A, B \text{ são AFDs e } L(A) = L(B) \}$$

Teorema: EQ_{AFD} é uma linguagem decidível.

Prova:

- 1 Construir o AFD C que reconhece a linguagem:
 $L(A) \cap \overline{L(B)} \cup (\overline{L(A)} \cap L(B))$
 Notar que $L(A) = L(B) \Leftrightarrow L(C) = \emptyset$;
- 2 Determinar se $L(C) = \emptyset$;
- 3 Em caso afirmativo, páre e aceite a entrada;
- 4 Caso contrário, páre e rejeite a entrada.

Problema A_{GLC}

Geração de cadeia por gramática livre de contexto:

$$A_{GLC} = \{\langle G, w \rangle \mid G \text{ é uma GLC que gera } w\}$$

Teorema: A_{GLC} é uma linguagem decidível.

Prova:

- 1 Construir uma MT que obtém G' na Forma Normal de Chomsky ($A \rightarrow BC \mid a$) tal que $L(G) = L(G')$;
- 2 Considerar $n = |w|$;
- 3 Se $n > 0$, então fazer todas as derivações com $2 * n - 1$ passos;
- 4 Se $n = 0$, então fazer todas as derivações com 1 passo;
- 5 Se alguma dessas derivações gera w , páre e aceite;
- 6 Caso contrário, páre e rejeite.

Problema A_{GLC}

- ▶ A geração de uma cadeia de comprimento n numa GLC na Forma Normal de Chomsky demanda, necessariamente, a aplicação de $n - 1$ regras do tipo $A \rightarrow BC$ (para gerar uma forma sentencial com n símbolos não-terminais) e também a aplicação de n regras do tipo $A \rightarrow a$ para transformar a forma sentencial numa sentença.
- ▶ Portanto, a geração de uma cadeia de n símbolos requer a aplicação de $2 * n - 1$ regras ou passos de derivação;
- ▶ Existe um conjunto finito de seqüências de derivação com qualquer quantidade de passos;
- ▶ Basta obter todas elas e verificar se alguma produz a cadeia informada na entrada;
- ▶ Em caso afirmativo, a cadeia pertence à linguagem;
- ▶ Em caso negativo, ela não pertence.

Problema A_{GLC}

Exemplo

Seja:

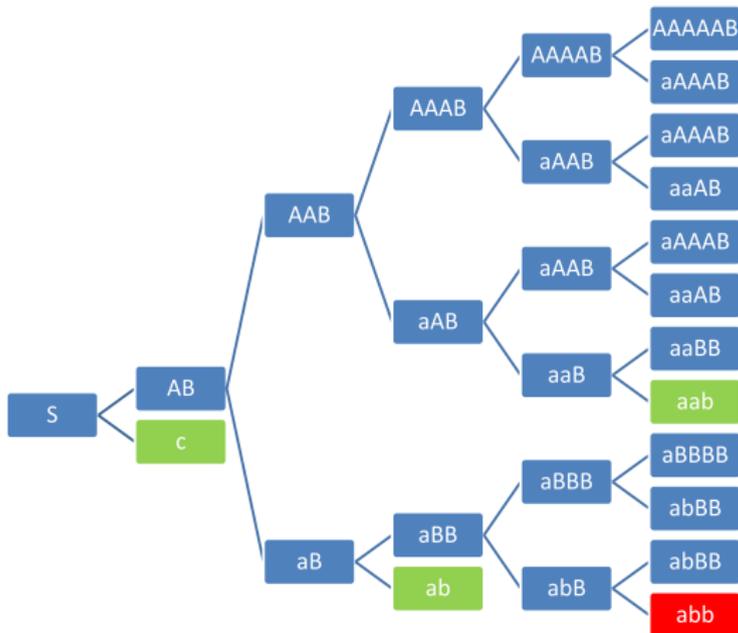
- ▶ $S \rightarrow AB$
- ▶ $S \rightarrow c$
- ▶ $A \rightarrow AA$
- ▶ $B \rightarrow BB$
- ▶ $A \rightarrow a$
- ▶ $B \rightarrow b$

Considere a cadeia abb :

- ▶ $|abb| = 3$;
- ▶ Deve-se pesquisar todas as seqüências de derivação com até $2 * 3 - 1 = 5$ passos;
- ▶ Para simplificar, serão consideradas apenas derivações mais à esquerda.

Problema A_{GLC}

Exemplo



Problema A_{GLC}

Construir uma MT que simula G diretamente pode não funcionar, pois pode haver seqüências infinitas de derivações em G . Por exemplo, se G possuir as regras unitárias $X \rightarrow Y$ e $Y \rightarrow X$, é possível que a seqüência de derivações torne-se infinita:

$$\dots \Rightarrow \alpha X \beta \Rightarrow \alpha Y \beta \Rightarrow \alpha X \beta \Rightarrow \alpha Y \beta \Rightarrow \dots$$

Problema V_{GLC}

Vacuidade da linguagem gerada por uma gramática livre de contexto:

$$V_{GLC} = \{\langle G \rangle \mid G \text{ é uma GLC e } L(G) = \emptyset\}$$

Teorema: V_{GLC} é uma linguagem decidível.

Prova:

- 1 Marcar todos os símbolos terminais de G ;
- 2 Repetir até que nenhum novo símbolo não-terminal venha a ser marcado:
 - ▶ Marque todos os símbolos não-terminais X para os quais existam regras $X \rightarrow Y_1 Y_2 \dots Y_n$ e cada Y_i já esteja marcado;
- 3 Se a raiz da gramática não estiver marcada, páre e aceite; caso contrário, páre e rejeite.

Problema V_{GLC}

Testar todas as cadeias w em G diretamente pode não funcionar, pois pode haver uma quantidade infinita de cadeias a serem testadas.

Problema EQ_{GLC}

Igualdade das linguagens geradas por duas gramáticas livres de contexto:

$$EQ_{GLC} = \{\langle G, H \rangle \mid G, H \text{ são GLCs e } L(G) = L(H)\}$$

Teorema: EQ_{AFD} é uma linguagem indecidível.

Prova:

- ▶ Será vista mais adiante;
- ▶ A classe das linguagens livres de contexto não é fechada em relação à operação de complementação.

Problema *LLC*

Determinar se uma cadeia pertence à uma determinada linguagem livre de contexto L (análise sintática):

$$LLC = \{\langle w \rangle \mid w \in L(G)\}$$

Teorema: *LLC* é uma linguagem decidível.

Prova:

- ▶ Seja G uma GLC tal que $L = L(G)$;
- ▶ Determinar se $\langle G, w \rangle$ é aceita pela MT que decide A_{GLC} ;
- ▶ Em caso afirmativo, páre e aceite;
- ▶ Caso contrário, páre e rejeite.

Problema *LLC*

Construir uma MT que simula diretamente um autômato de pilha P que reconhece L pode não funcionar, pois podem haver seqüências de movimentações infinitas em P .

Ordenação de cadeias binárias

Seja $\Sigma = \{0, 1\}$. Então o conjunto Σ^* é enumerável.

- ▶ Basta considerar as cadeias $w \in \Sigma^*$ em ordem crescente de comprimento;
- ▶ Para cada comprimento, considerar as cadeias ordenadas lexicograficamente;
- ▶ $\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, \dots$
- ▶ A i -ésima cadeia será denotada w_i ;
- ▶ $w_1 = \epsilon, w_2 = 0, w_3 = 1, w_4 = 00, w_5 = 01, w_6 = 10, w_7 = 11, \dots$

Codificação de Máquinas de Turing

Convenções

Seja M com alfabeto de entrada $\Sigma = \{0, 1\}$. Uma codificação de M sobre o próprio alfabeto Σ é a seguinte:

- ▶ $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_r\}$;
- ▶ Suponha que o estado inicial é q_1 ;
- ▶ Suponha critério de aceitação “Entrada” (a máquina pára quando entra num estado final);
- ▶ Suponha que há um único estado final, e ele é q_2 ;
- ▶ $\Sigma = \{X_1, X_2, \dots, X_s\}$;
- ▶ Suponha $X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = B$. Os demais símbolos são auxiliares;
- ▶ Suponha que D_1 representa movimento para a esquerda, D_2 para a direita.

Codificação de Máquinas de Turing

Convenções

Considere $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_l, D_m)$. Uma codificação para essa transição é:

$$0^i 10^j 10^k 10^l 10^m$$

onde:

- ▶ 0^i representa o estado q_i ;
- ▶ 0^j representa o símbolo X_j ;
- ▶ 0^k representa o estado q_k ;
- ▶ 0^l representa o símbolo X_l ;
- ▶ 0^m representa o movimento D_m .

Como i, j, k, l, m são maiores que zero, a cadeia 11 não é subcadeia de $0^i 10^j 10^k 10^l 10^m$. 11 será usada para separar transições.

Codificação de Máquinas de Turing

Convenções

Considere $|\delta| = n$. Uma codificação para δ (e conseqüentemente para a Máquina de Turing M) é:

$$C_111C_211\dots C_{n-1}11C_n$$

onde C_i representa a codificação da transição i .

Como cada C_i começa e termina com pelo menos um símbolo 0, a cadeia 111 não é subcadeia de $C_111C_211\dots C_{n-1}11C_n$. 111 será usada para separar a MT de outros elementos, se for o caso.

Codificação de Máquinas de Turing

Exemplo

Seja:

$$M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, \delta, q_1, B, \{q_2\})$$

com:

$$\delta(q_1, 1) = (q_3, 0, R) \quad \underbrace{0}_{q_1} \ 1 \ \underbrace{00}_1 \ 1 \ \underbrace{000}_{q_3} \ 1 \ \underbrace{0}_0 \ 1 \ \underbrace{00}_R$$

$$\delta(q_3, 0) = (q_1, 1, R) \quad 0001010100100$$

$$\delta(q_3, 1) = (q_2, 0, R) \quad 00010010010100$$

$$\delta(q_3, B) = (q_3, 1, L) \quad 0001000100010010$$

Portanto, a cadeia que representa M é:

$$\underbrace{0100100010100}_{\delta(q_1,1)=(q_3,0,R)} \ 11 \ \underbrace{0001010100100}_{\delta(q_3,0)=(q_1,1,R)} \ 11 \ \underbrace{00010010010100}_{\delta(q_3,1)=(q_2,0,R)} \ 11 \ \underbrace{0001000100010010}_{\delta(q_3,B)=(q_3,1,L)}$$

Cadeias binárias e Máquinas de Turing

Com a ressalva abaixo, é possível considerar a i -ésima cadeia binária w_i como sendo a representação de uma Máquina de Turing, denotada M_i .

- ▶ Se w_i não respeita as regras de formação enunciadas anteriormente, então considerar M_i como a Máquina de Turing formada por um único estado (não-final), sem transições, e que pára para qualquer entrada; portanto, $L(M_i) = \{\}$;
- ▶ Caso contrário, w_i denota a Máquina de Turing M_i codificada conforme as regras expostas.

Método diagonal de Cantor

- ▶ Publicado em 1891;
- ▶ Mostra como obter um conjunto diferente de todos os conjuntos de uma dada coleção de conjuntos, seja ela finita ou infinita;
- ▶ Cada um dos conjuntos dessa coleção, por sua vez, pode conter um número finito ou infinito de elementos;
- ▶ O número de elementos usados para caracterizar tais conjuntos também pode ser finito ou infinito;
- ▶ Bastante usado até os dias de hoje.

Método diagonal de Cantor

Características:

- ▶ Matriz com linhas e colunas;
- ▶ Cada coluna representa um certo elemento (podem existir infinitas colunas);
- ▶ Cada linha representa um conjunto criado com esses elementos (se a quantidade de colunas for infinita, podem existir infinitos conjuntos);
- ▶ O cruzamento de uma linha com uma coluna é marcado para indicar se aquele elemento pertence (1) ou não pertence (0) ao respectivo conjunto;
- ▶ Considere a diagonal e troque 0s por 1s e vice-versa;
- ▶ O conjunto assim obtido é diferente de todos os conjuntos representados na matriz.

Método diagonal de Cantor

Exemplo

- ▶ Suponha que os elementos são números naturais;
- ▶ Cada coluna representa um número natural;
- ▶ Cada linha representa um subconjunto dos números naturais.
- ▶ Quaisquer que sejam os conjuntos considerados nas linhas, a complementação da diagonal principal produz um novo subconjunto desses mesmos elementos que difere de todos os considerados nas linhas da matriz.

Método diagonal de Cantor

Exemplo

	0	1	2	3	4	...
S_1	1	1	1	0	1	...
S_2	1	1	0	0	1	...
S_3	1	0	0	1	0	...
S_4	0	1	1	1	0	...
S_5	0	0	1	0	0	...
...

Método diagonal de Cantor

Exemplo

Na figura anterior, temos:

- ▶ $S_1 = \{0, 1, 2, 4, \dots\}$;
- ▶ $S_2 = \{0, 1, 4, \dots\}$;
- ▶ $S_3 = \{0, 3, \dots\}$;
- ▶ $S_4 = \{1, 2, 3, \dots\}$;
- ▶ $S_5 = \{2, \dots\}$;
- ▶ Diagonal: 11010...;
- ▶ Diagonal complementada: 00101...;
- ▶ Conjunto obtido: $X = \{2, 4, \dots\}$;
- ▶ $X \neq S_i, i \geq 0$.

Método diagonal de Cantor

Aplicações

Serve, por exemplo, para demonstrar que $|\mathbb{N}| < |2^{\mathbb{N}}|$:

- ▶ Suponha que $|\mathbb{N}| = |2^{\mathbb{N}}|$;
- ▶ Então, existe uma bijeção entre \mathbb{N} e $2^{\mathbb{N}}$;
- ▶ As colunas representam os números naturais;
- ▶ Cada linha representa um subconjunto dos números naturais dessa bijeção; suponha que eles sejam rotulados por números naturais, a partir de zero;
- ▶ Sempre é possível obter um novo subconjunto que não foi considerado pela bijeção;
- ▶ A hipótese é falsa e não existe tal bijeção;
- ▶ $|\mathbb{N}| < |2^{\mathbb{N}}|$.

Método diagonal de Cantor

Aplicações

Bijeção hipotética representada pela matriz:

	0	1	2	3	4	...
0	p_{00}	p_{01}	p_{02}	p_{03}	p_{04}	...
1	p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	...
2	p_{20}	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}	...
3	p_{30}	p_{31}	p_{32}	p_{33}	p_{34}	...
4	p_{40}	p_{41}	p_{42}	p_{43}	p_{44}	...
...

Basta considerar o subconjunto $\{i \in \mathbb{N} \mid p_{ii} = 0, \text{ para todo } i \geq 0\}$.

Linguagem L_d

$$L_d = \{w_i \in \{0, 1\}^* \mid w_i \notin L(M_i)\}$$

- ▶ Contém as cadeias que, quando consideradas como codificações de Máquinas de Turing, são tais que elas não são aceitas pelas respectivas Máquinas de Turing que elas representam;
- ▶ Linguagem da “diagonalização”.

Diagonalização e a linguagem L_d

Para cada par linha/coluna (i, j) , a tabela indica se M_i aceita w_j :

	w_1	w_2	w_3	w_4	...
$\langle M_1 \rangle = w_1$	0	1	1	0	...
$\langle M_2 \rangle = w_2$	1	1	0	0	...
$\langle M_3 \rangle = w_3$	0	0	1	1	...
$\langle M_4 \rangle = w_4$	0	1	0	1	...
...

1 indica aceitação, 0 indica rejeição ou loop (os valores apresentados são hipotéticos).

Diagonalização e a linguagem L_d

- ▶ Vetor característico: $0, 1, 1, 1, \dots$;
- ▶ Complemento do vetor característico: $1, 0, 0, 0, \dots$;
- ▶ $w_1 \in L_d, w_2 \notin L_d, w_3 \notin L_d, w_4 \notin L_d$ etc;
- ▶ Portanto, $L_d = \{w_1, \dots\}$;
- ▶ $L_d = \{w_i | w_i \notin L(M_i)\}$;

Diagonalização e a linguagem L_d

- ▶ L_d não é aceita por nenhuma Máquina de Turing, pois o vetor característico dela difere em pelo menos uma posição do vetor característico de todas as linguagens aceitas por todas as Máquinas de Turing que existem;
- ▶ Em outras palavras, existe pelo menos uma cadeia que difere L_d de $L(M_i), \forall i \geq 1$;
- ▶ L_d não é uma linguagem recursivamente enumerável;
- ▶ Não existe nenhuma Máquina de Turing que aceite L_d .

Teorema 1

L_d não é recursivamente enumerável

Teorema:

A linguagem L_d não é recursivamente enumerável.

Prova:

- ▶ Suponha que L_d seja recursivamente enumerável. Então deve existir uma Máquina de Turing M que aceita L_d . Logo, $M = M_i$ para algum valor de i . Considere, portanto, que M_i aceita L_d e considere a cadeia w_i :
 - ▶ Se $w_i \in L_d$, então M_i aceita w_i . Mas, por definição, se M_i aceita w_i então w_i não pode pertencer à L_d ;
 - ▶ Se $w_i \notin L_d$, então M_i não aceita w_i . Mas, por definição, se M_i não aceita w_i então w_i deve pertencer à L_d .
- ▶ Qualquer que seja o caso, há uma contradição;
- ▶ Logo, a hipótese é falsa e não existe M_i que aceite L_d .

Teorema 2

Se L é recursiva, então \overline{L} também é recursiva

Teorema:

Se L é recursiva, então \overline{L} também é recursiva.

Prova:

Seja $L = L(M)$, onde M é uma Máquina de Turing que sempre pára. O seguinte método mostra como obter M' a partir de M de tal forma que $L(M') = \overline{L(M)}$. Inicialmente, $M' = M$.

- 1 Os estados finais de M tornam-se não-finais em M' ;
- 2 As transições que partiam dos estados finais de M (agora não finais em M') são removidas em M' (critério "entrada" apenas);
- 3 M' tem um novo e único estado final, não existente em M , denotado r ;
- 4 Para cada combinação de estado não-final de M e símbolo de entrada não aceito nesse estado, adicionar, em M' , uma transição do mesmo estado com esse símbolo para r .

Teorema 2

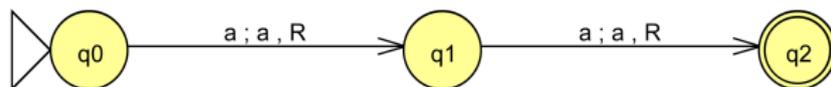
Se L é recursiva, então \overline{L} também é recursiva

- ▶ (1) e (2) garantem que todas as cadeias aceitas por M são rejeitadas por M' ;
- ▶ (3) e (4) garantem que todas as cadeias rejeitadas por M são aceitas por M' ;
- ▶ Como M sempre pára, então M' sempre pára também;
- ▶ Portanto, M' aceita \overline{L} e \overline{L} é recursiva.

Teorema 2

Exemplo

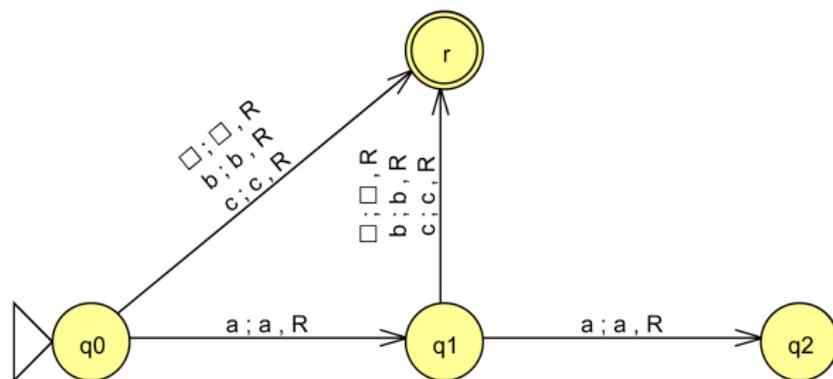
A Máquina de Turing M abaixo aceita a linguagem $aa(a|b|c)^*$ (cadeias que possuem aa como prefixo):



Teorema 2

Exemplo

A Máquina de Turing M' abaixo aceita a linguagem $(a|b|c)^* - aa(a|b|c)^*$ (cadeias que não possuem aa como prefixo):



Teorema 3

L e \bar{L} são recursivamente enumeráveis se e somente se L é recursiva

Teorema:

L e \bar{L} são recursivamente enumeráveis se e somente se L é recursiva.

Prova:

(\Leftarrow) Se L é recursiva, então, pelo Teorema 1, \bar{L} também é recursiva.

Como, pela definição, toda linguagem recursiva é também recursivamente enumerável, isso prova que L e \bar{L} são recursivamente enumeráveis.

(\Rightarrow) Sejam M_1 e M_2 as Máquinas de Turing que aceitam, respectivamente, L e \bar{L} . Os métodos apresentados a seguir mostram como obter M a partir de M_1 e M_2 de tal forma que $L(M) = L$ e M sempre pára. Ou seja, eles provam que L é recursiva.

Teorema 3

Método

Idéia geral: Simular M_1 e M_2 de forma intercalada, até que uma das duas pare e aceite a entrada:

- 1 Executar, alternadamente, movimentos em M_1 e M_2 ;
- 2 Como toda cadeia w pertence à $L(M_1)$ ou $L(M_2)$, é fato que M_1 ou M_2 aceita w ;
- 3 Se M_1 aceita, então M pára e aceita;
- 4 Se M_2 aceita, então M pára e rejeita;
- 5 Assim, $L(M) = L$, M sempre pára, e portanto L é recursiva.

Teorema 3

Método

Descrição: Construir M com duas fitas para simular, de forma intercalada, a operação de M_1 na primeira fita e de M_2 na segunda fita:

- 1 Ambas as fitas são inicializadas com a cadeia de entrada w a ser analisada;
- 2 Os estados de M são construídos para representar pares de estados de M_1 e M_2 , e também a máquina (1 ou 2) que irá se movimentar em seguida;
- 3 Em cada estado de M , são considerados alternadamente os símbolos presentes na primeira e na segunda fita;
- 4 Todos os estados de M que representam algum estado final de M_1 são finais; os demais estados de M são todos não-finais;
- 5 Se M_1 (M_2) parar sem aceitar, continuar com M_2 (M_1).

Teorema 3

Método

Detalhamento:

1. M copia a entrada w da fita 1 para a fita 2;
2. M seleciona M_1 ;
3. M tentar executar um movimento de M_1 ;
4. Se M_1 não tem movimento possível, M seleciona M_2 e vá para 6;
5. Senão, M simula o movimento de M_1 na fita 1 e seleciona M_2 ;
6. M tentar executar um movimento de M_2 ;
7. Se M_2 não tem movimento possível, vá para 2;
8. Senão, M simula o movimento de M_2 na fita 2 e vá para 2.

Teorema 3

Método

Algoritmo:Entrada:

- ▶ MT $M_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, q_{01}, B, F_1)$ determinística que aceita L e tem “entrada” como critério de aceitação;
- ▶ MT $M_2 = (Q_2, \Sigma, \Gamma_2, \delta_2, q_{02}, B, F_2)$ determinística que aceita \bar{L} e tem “entrada” como critério de aceitação;

Saída:

- ▶ MT $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ que aceita L e sempre pára;
- ▶ M possui duas fitas, é determinística e tem “entrada” como critério de aceitação.

Teorema 3

Método

Método:

- ▶ $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$
- ▶ $Q = Q_1 \times Q_2 \times \{1, 2\}$
- ▶ $q_0 = (q_{01}, q_{02}, 1)$
- ▶ $F = \{(q_1, q_2, f) \in Q_1 \times Q_2 \times \{1, 2\} \mid q_1 \in F_1\}$
- ▶ $G = \{(q_1, q_2, f) \in Q_1 \times Q_2 \times \{1, 2\} \mid q_2 \in F_2\}$

Teorema 3

Método

- ▶ $\forall q \in (Q - (F \cup G)), \forall x \in \Gamma$, suponha $q = (q_1, q_2, f)$ e faça:
- ▶ Se $f = 1$ então:
 - ① $\forall \delta_1(q_1, x) = (q_3, y, D)$, faça:
 $\delta((q_1, q_2, 1), x, \epsilon) = ((q_3, q_2, 2), (y, D), (\epsilon, S))$
 - ② $\forall \delta_1(q_1, x)$ não definida, faça:
 $\delta((q_1, q_2, 1), x, \epsilon) = ((q_1, q_2, 2), (x, S), (\epsilon, S))$
- ▶ Se $f = 2$ então:
 - ① $\forall \delta_2(q_2, x) = (q_3, y, D)$, faça:
 $\delta((q_1, q_2, 2), \epsilon, x) = ((q_1, q_3, 1), (\epsilon, S)(y, D))$
 - ② $\forall \delta_2(q_2, x)$ não definida, faça:
 $\delta((q_1, q_2, 2), \epsilon, x) = ((q_1, q_2, 1), (\epsilon, S)(x, S))$

Teorema 3

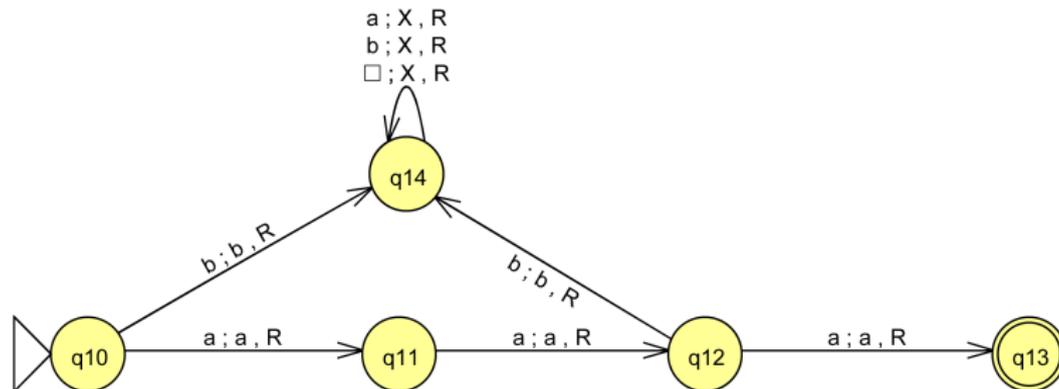
Exemplo

Suponha M_1 tal que:

- ▶ M_1 é determinística;
- ▶ $L_1(M_1) = ACEITA(M_1) = aaa(a|b)^*$
- ▶ $REJEITA(M_1) = a|aa|ab(a|b)^*$
- ▶ $LOOP(M_1) = (aab|b)(a|b)^*$
- ▶ $ACEITA(M_1) \cup REJEITA(M_1) \cup LOOP(M_1) = \{a, b\}^*$
- ▶ $ACEITA(M_1) \cap REJEITA(M_1) \cap LOOP(M_1) = \emptyset$

Teorema 3

Exemplo



Teorema 3

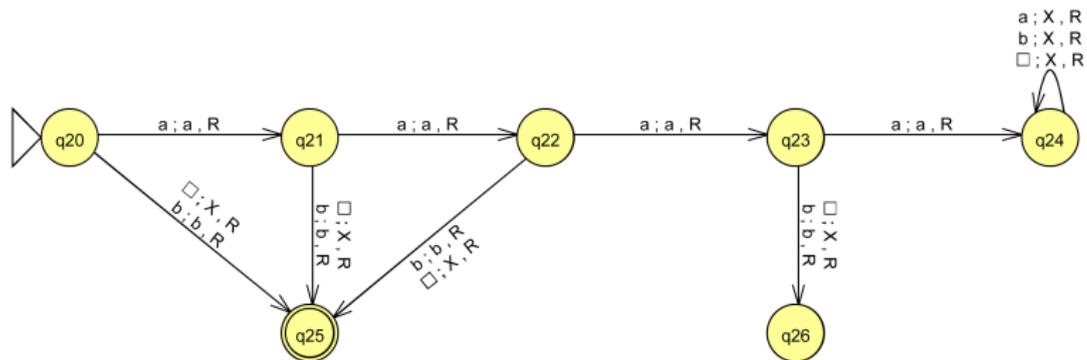
Exemplo

Suponha M_2 tal que:

- ▶ M_2 é determinística;
- ▶ $L_2(M_2) = \overline{L(M_1)} = ACEITA(M_2) = \epsilon|a|aa|(b|ab|aab)(a|b)^*$
- ▶ $REJEITA(M_2) = aaa|aaab(a|b)^*$
- ▶ $LOOP(M_2) = aaaa(a|b)^*$
- ▶ $ACEITA(M_2) \cup REJEITA(M_2) \cup LOOP(M_2) = \{a, b\}^*$
- ▶ $ACEITA(M_2) \cap REJEITA(M_2) \cap LOOP(M_2) = \emptyset$

Teorema 3

Exemplo



Teorema 3

Exemplo

		M_2		
		A	R	L
M_1	A	×	aaab aaa	aaaa
	R	abaa aa	×	×
	L	aabb	×	×

Teorema 3

Exemplo

aaab		aaa	
M_1	M_2	M_1	M_2
A	R	A	R
$(\epsilon, q_{10}, aaab)$	$(\epsilon, q_{20}, aaab)$	(ϵ, q_{10}, aaa)	(ϵ, q_{20}, aaa)
(a, q_{11}, aab)	(a, q_{21}, aab)	(a, q_{11}, aa)	(a, q_{21}, aa)
(aa, q_{12}, ab)	(aa, q_{22}, ab)	(aa, q_{12}, aba)	(aa, q_{22}, a)
(aaa, q_{13}, b)	(aaa, q_{23}, b)	(aaa, q_{13}, ϵ)	(aaa, q_{23}, ϵ)
✓	$(aaab, q_{26}, \epsilon)$	✓	×
	×		

Teorema 3

Exemplo

abaa		aa	
M_1	M_2	M_1	M_2
R	A	R	A
$(\varepsilon, q_{10}, abaa)$	$(\varepsilon, q_{20}, abaa)$	$(\varepsilon, q_{10}, aa)$	$(\varepsilon, q_{20}, aa)$
(a, q_{11}, baa)	(a, q_{22}, baa)	(a, q_{11}, a)	(a, q_{21}, a)
\times	(ab, q_{23}, aa)	$(aa, q_{12}, \varepsilon)$	$(aa, q_{22}, \varepsilon)$
	\checkmark	\times	$(aaX, q_{25}, \varepsilon)$
			\checkmark

Teorema 3

Exemplo

aaaa		aabb	
M_1	M_2	M_1	M_2
A	L	L	A
$(\varepsilon, q_{10}, aaaa)$	$(\varepsilon, q_{20}, aaaa)$	$(\varepsilon, q_{10}, aabb)$	$(\varepsilon, q_{20}, aabb)$
(a, q_{11}, aaa)	(a, q_{21}, aaa)	(a, q_{11}, abb)	(a, q_{21}, abb)
(aa, q_{12}, aa)	(aa, q_{22}, aa)	(aa, q_{12}, bb)	(aa, q_{22}, bb)
(aaa, q_{13}, a)	(aaa, q_{23}, a)	(aab, q_{14}, b)	(aab, q_{25}, b)
✓	$(aaaaa, q_{24}, \varepsilon)$	$(aabX, q_{14}, \varepsilon)$	✓
	$(aaaaaX, q_{24}, \varepsilon)$	$(aabXX, q_{14}, \varepsilon)$	
	$(aaaaaXX, q_{24}, \varepsilon)$	$(aabXXX, q_{14}, \varepsilon)$	
	

Teorema 3

Exemplo

Composição de M_1 e M_2 :

- ▶ $Q_1 = \{q_{10}, q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{14}\}$;
- ▶ $Q_2 = \{q_{20}, q_{21}, q_{22}, q_{23}, q_{24}, q_{25}, q_{26}\}$;
- ▶ $|Q| = 5 * 7 * 2 = 70$;
- ▶ $|F| = 1(q_{13}) * 7 * 2 = 14$;
- ▶ $|G| = 5 * 1(q_{25}) * 2 = 10$;
- ▶ Estado inicial $q_0 = (q_{10}, q_{20}, 1)$;
- ▶ Próximo passo: definir as transições de $70 - 14 - 10 = 46$ estados.

Teorema 3

Exemplo

Composição de M_1 e M_2 :

- ▶ Estado inicial $q_0 = (q_{10}, q_{20}, 1)$;
- ▶ Como $f = 1$ então:
 - ▶ $\delta((q_{10}, q_{20}, 1), a, \epsilon) = ((q_{11}, q_{20}, 2), (a, R), (\epsilon, S))$
pois $\delta_1(q_{10}, a) = (q_{11}, a, R)$;
 - ▶ $\delta((q_{10}, q_{20}, 1), b, \epsilon) = ((q_{14}, q_{20}, 2), (b, R), (\epsilon, S))$
pois $\delta_1(q_{10}, b) = (q_{14}, b, R)$;
 - ▶ $\delta((q_{10}, q_{20}, 1), \square, \epsilon) = ((q_{10}, q_{20}, 2), (\square, S), (\epsilon, S))$
pois $\delta_1(q_{10}, \square)$ não é definida;
 - ▶ $\delta((q_{10}, q_{20}, 1), X, \epsilon) = ((q_{10}, q_{20}, 2), (X, S), (\epsilon, S))$
pois $\delta_1(q_{10}, X)$ não é definida.

Teorema 3

Exemplo

Composição de M_1 e M_2 :

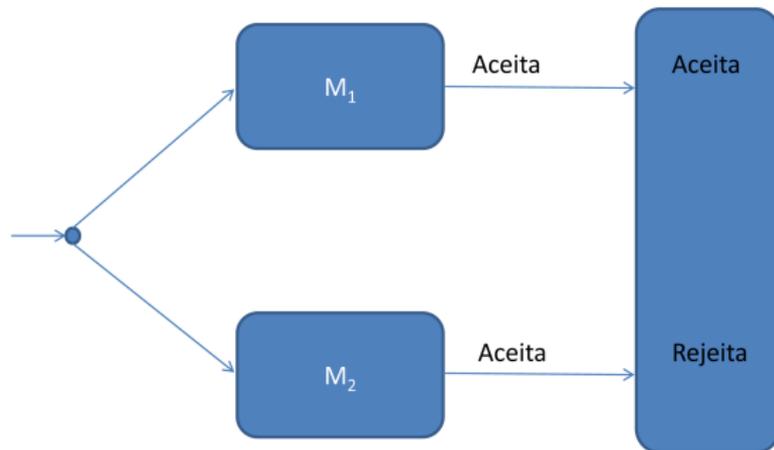
- ▶ Estado $(q_{11}, q_{20}, 2)$;
- ▶ Como $f = 2$ então:
 - ▶ $\delta((q_{11}, q_{20}, 2), \epsilon, a) = ((q_{11}, q_{21}, 1), (\epsilon, S), (a, R))$
pois $\delta_2(q_{20}, a) = (q_{21}, a, R)$;
 - ▶ $\delta((q_{11}, q_{20}, 2), \epsilon, b) = ((q_{11}, q_{25}, 1), (\epsilon, S), (b, R))$
pois $\delta_2(q_{20}, b) = (q_{25}, b, R)$;
 - ▶ $\delta((q_{11}, q_{20}, 2), \epsilon, \square) = ((q_{11}, q_{25}, 1), (\epsilon, S), (X, R))$
pois $\delta_2(q_{20}, \square) = (q_{25}, X, R)$;
 - ▶ $\delta((q_{11}, q_{20}, 2), \epsilon, X) = ((q_{11}, q_{20}, 1), (\epsilon, S), (X, S))$
pois $\delta_2(q_{20}, X)$ não é definida.

As transições dos demais estados são obtidas de forma similar.

Teorema 3

Método 2?

Construir M com uma única fita, a partir da composição não-determinística de M_1 e de M_2 :



Teorema 3

Método 2?

Suponha $w \notin L$ tal que $w \in LOOP(M_1)$ e $w \in ACEITA(M_2)$. Nesse caso, w possui duas seqüências distintas de movimentação em M :

- ▶ Na primeira, w faz M entrar em loop infinito;
- ▶ Na segunda, w é rejeitada por M (pois ela é aceita por M_2);
- ▶ Logo, $w \in LOOP(M)$ e M não pára com qualquer entrada;
- ▶ M não constitui prova de que L seja recursiva;
- ▶ Método 2 não funciona!
- ▶ Para ilustrar, considere a cadeia aab no exemplo anterior.

Teorema 3

Conclusões

- ▶ Toda cadeia w está em L ou \overline{L} ;
- ▶ Portanto, pelo menos uma das duas máquinas M_1 e M_2 sempre pára com w (M_1 aceitando ou M_2 aceitando);
- ▶ Como M pára sempre quando M_1 ou M_2 aceitam, então M sempre pára;
- ▶ M aceita todas as cadeias de L ;
- ▶ M rejeita todas as cadeias de \overline{L} .
- ▶ L é recursiva.

$$L \times \bar{L}$$

Possibilidades

Considere que as linhas representam L e as colunas representam \bar{L} . As seguintes combinações, e apenas essas, são possíveis:

	Recursiva	RE não-recursiva	Não-RE
Recursiva	✓	-	-
RE não-recursiva	-	-	✓
Não-RE	-	✓	✓

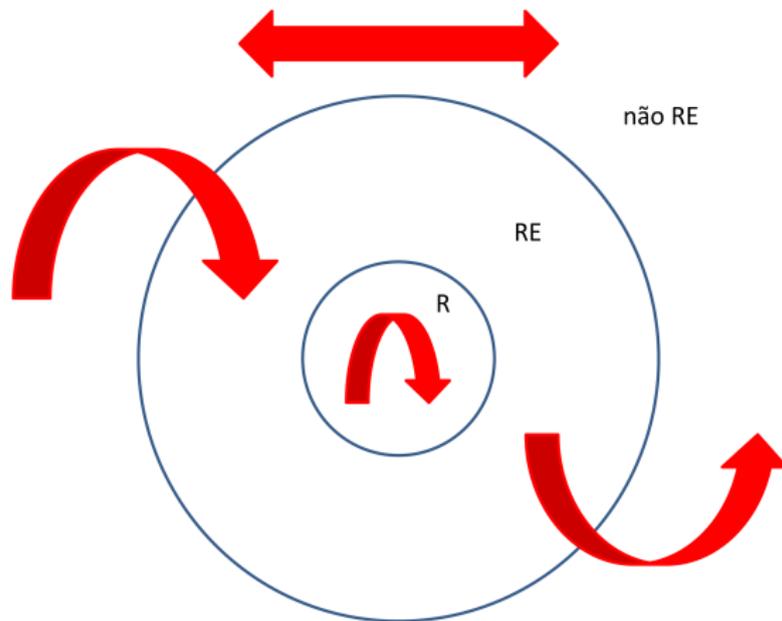
- ▶ O Teorema 2 exclui as possibilidades Recursiva/RE não-recursiva, Recursiva/Não-RE, RE não-recursiva/Recursiva e Não-RE/Recursiva;
- ▶ O Teorema 3 exclui a possibilidade RE não-recursiva/RE não-recursiva.

$L \times \bar{L}$

Problemas e seus complementos:

- ▶ O complemento de um problema solucionável é sempre um problema solucionável;
 - ▶ Não há loop com nenhuma cadeia de Σ^* ;
- ▶ O complemento de um problema estritamente parcialmente solucionável é totalmente insolúvel:
 - ▶ Como existe pelo menos uma cadeia $w \in \Sigma^* - L$ que provoca loop, em $L' = \Sigma^* - L$ ela não será aceita;
- ▶ O complemento de um problema totalmente insolúvel pode ser estritamente parcialmente solucionável ou totalmente insolúvel:
 - ▶ Como existe pelo menos uma cadeia $w \in L$ que provoca loop, em $L' = \Sigma^* - L$ ela provoca loop também;
 - ▶ Se existe uma cadeia $w \in \Sigma^* - L$ que provoca loop, em $L' = \Sigma^* - L$ ela provoca loop também;

$$L \times \bar{L}$$



$L \times \bar{L}$

Exemplo

Considere a linguagem L_d :

- ▶ Conforme o Teorema 1, L_d é não-RE;
- ▶ Conseqüentemente, \bar{L}_d deve ser RE não-recursiva ou não-RE;
- ▶ Certamente \bar{L}_d não é recursiva;
- ▶ $L_d = \{w_i | w_i \notin L(M_i)\}$;
- ▶ $\bar{L}_d = \{w_i | w_i \in L(M_i)\}$;
- ▶ Conforme será provado mais adiante, \bar{L}_d é RE não-recursiva.

Conceito

- ▶ Máquinas de Turing incorporam os programas que elas executam na sua definição;
- ▶ Como transformar uma Máquina de Turing em dados para outra Máquina de Turing processar?
- ▶ Resposta: Máquina de Turing Universal (U);
- ▶ Aceita como entrada a descrição de uma outra Máquina de Turing e a entrada que essa outra máquina deve processar;
- ▶ Simula a máquina descrita e produz como resultado o mesmo resultado que a máquina simulada produziria;
- ▶ É universal pois é capaz de executar qualquer algoritmo.

Convenções

U possui quatro fitas:

- ▶ A primeira fita contém a descrição da máquina a ser simulada ($\langle M \rangle$) e a sua correspondente entrada (w);
- ▶ A segunda fita é usada para simular a fita da máquina a ser simulada (M); símbolos $X_i, i \geq 1$, são denotados 0^i e são separados na fita pelo símbolo 1; 0 representa 0, 00 representa 1 e 000 representa B ;
- ▶ A terceira fita é usada para representar o estado de M ; estados $q_i, i \geq 1$, são denotados 0^i ;
- ▶ A quarta fita é usada para rascunho.

Convenções

Suponha $\langle M \rangle = C_111C_211\dots11C_{n-1}11C_n$ e $w = 01011\dots$

Então:

Fita 1 $\langle M \rangle w$	$C_111C_211\dots 11C_{n-1}11C_n11101011 \dots$													
	↑													
Fita 2 $\langle w \rangle$	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	...
	↑													
Fita 3 q_i	0													
	↑													
Fita 4 aux														
	↑													

Inicialização

- 1) U verifica se $\langle M \rangle$ corresponde à descrição de uma Máquina de Turing válida; em caso negativo, U pára e rejeita a entrada (descrições inválidas representam máquinas que aceitam a linguagem vazia, portanto toda entrada deve ser rejeitada);
- 2) U copia a cadeia w da primeira para a segunda fita, codificando os seus símbolos da maneira apropriada (seqüências de 0 separadas pelo símbolo 1);
- 3) U posiciona a cabeça de leitura no primeiro símbolo da segunda fita;
- 4) Como, por convenção, o estado inicial de M é q_1 , U grava o símbolo $0^1 = 0$ na terceira fita.

Operação

- 5) Se o símbolo gravado na posição corrente da segunda fita é 0^j (símbolo corrente de M) e a cadeia contida na terceira fita é 0^i (estado corrente de M), então U procura, na primeira fita, pela cadeia $0^i 10^j 10^k 10^l 10^m$, a qual representa a transição que seria executada por M nessa configuração (lembre-se que M é determinístico);
- 6) Caso não exista tal transição, então M pára e portanto U deve parar também;
- 7) Caso exista tal transição, então U :
 - ▶ Modifica o símbolo corrente de M na segunda fita (de 0^j para 0^l)
 - ▶ Modifica o estado corrente de M na terceira fita (de 0^i para 0^k);
 - ▶ Desloca a cabeça de leitura na segunda fita para o próximo símbolo da esquerda (se $m = 1$) ou da direita (se $m = 2$); lembre-se que os símbolos são cadeias de 0 separadas por 1;
 - ▶ Se o novo estado for 00 (que representa q_2 , o estado final de M), então U pára e aceita a entrada.

Conclusão

- ▶ U simula M com a entrada w ;
- ▶ U pára e aceita $\langle M \rangle w \Leftrightarrow M$ pára e aceita w ;
- ▶ U pára e rejeita $\langle M \rangle w \Leftrightarrow M$ pára e rejeita w ;
- ▶ U entra em loop infinito com $\langle M \rangle w \Leftrightarrow M$ entra em loop infinito com w ;

Conceito

Suponha que $\langle M \rangle$ representa uma codificação de uma MT M sobre o alfabeto $\{0, 1\}$. Suponha que w é uma cadeia sobre esse mesmo alfabeto. A “linguagem universal”:

$$L_u = \{\langle M \rangle w \mid M \text{ é uma MT que aceita } w\}$$

é aceita por U .

- ▶ O problema de determinar se uma Máquina de Turing M aceita a cadeia w pode ser traduzido...
- ▶ Pelo problema de determinar se $\langle M \rangle w \in L_u$...
- ▶ Ou seja, determinar se $\langle M \rangle w \in L(U)$;
- ▶ $L_u = L(U)$ é recursiva, RE não-recursiva ou não-RE?

Teorema 4

L_u é RE não-recursiva

L_u é RE:

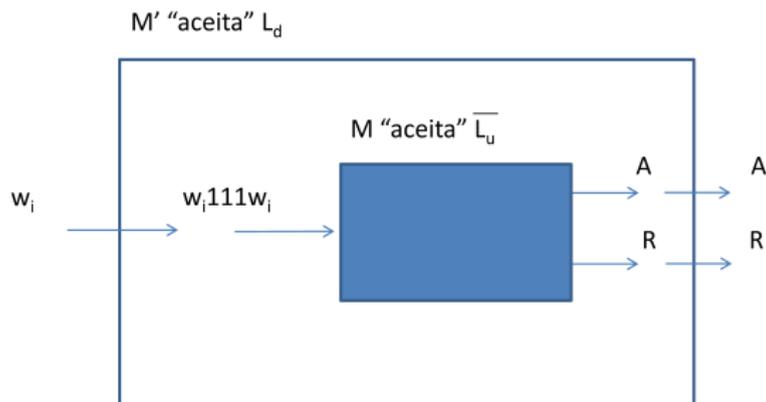
- ▶ U é uma Máquina de Turing que aceita L_u .

Teorema 4

 L_u é RE não-recursiva L_u não é recursiva (Hopcroft):

- ▶ Suponha que L_u seja recursiva;
- ▶ Então, $\overline{L_u}$ também é recursiva;
- ▶ Considere que M é tal que $L(M) = \overline{L_u}$;
- ▶ Seja M' tal que, com a entrada w :
 - ▶ M' transforma w em $w111w$;
 - ▶ M' executa M com a entrada $w111w$;
 - ▶ Considere $w = w_i = \langle M_i \rangle$;
 - ▶ M aceita w_i111w_i se e somente se $w_i \notin L(M_i)$, ou seja, se $w_i \in L_d$; caso contrário M rejeita w_i111w_i ;
 - ▶ Suponha que M' aceita quando M aceita e rejeita quando M rejeita;
 - ▶ Logo, M' decide L_d ;
 - ▶ Como L_d é não-RE, a hipótese é falsa e L_u não pode ser recursiva.

Teorema 4

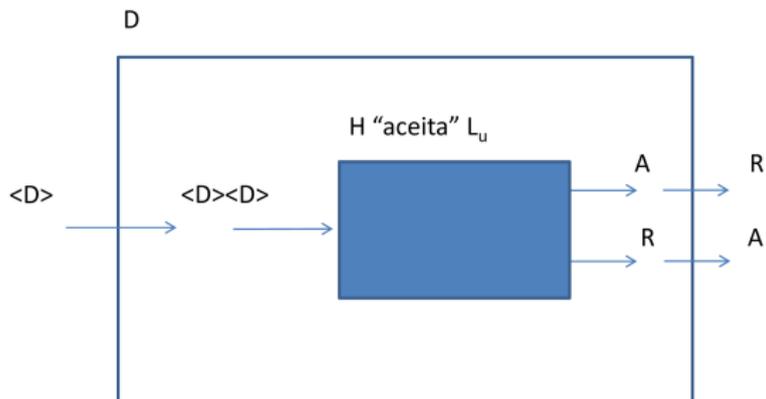
 L_u é RE não-recursiva

Teorema 4

 L_u é RE não-recursiva L_u não é recursiva (Sipser):

- ▶ Suponha que L_u seja recursiva e que $H(\langle M \rangle w)$ decida L_u ;
- ▶ Considere a máquina D :
 - ▶ D aceita como entrada $\langle M \rangle$;
 - ▶ D executa H com a entrada $\langle M \rangle \langle M \rangle$;
 - ▶ D aceita se H rejeita e rejeita se H aceita.
- ▶ Considere que D receba como entrada $\langle D \rangle$;
- ▶ Se D aceita $\langle D \rangle$ (execução de H) então D rejeita $\langle D \rangle$;
- ▶ Se D rejeita $\langle D \rangle$ (execução de H) então D aceita $\langle D \rangle$;
- ▶ Em qualquer caso, uma contradição; logo, a hipótese é falsa e L_u não é recursiva.

Teorema 4

 L_u é RE não-recursiva

Teorema 4

Diagonalização

Para cada par linha/coluna (i, j) , a tabela indica se M_i aceita w_j :

	1	2	3	4	...
1	✓			✓	...
2	✓	✓	✓	✓	...
3					...
4	✓	✓			...
...

Teorema 4

Diagonalização

Para cada par linha/coluna (i, j) , a tabela indica o resultado produzido por H :

	1	2	3	4	...
1	✓	×	×	✓	...
2	✓	✓	✓	✓	...
3	×	×	×	×	...
4	✓	✓	×	×	...
...

Teorema 4

Diagonalização

Se existisse a Máquina de Turing D , a contradição aconteceria na posição $(\langle D \rangle, D)$:

	1	2	3	4	...	D	...
1	✓	×	×	✓	...	✓	...
2	✓	✓	✓	✓	...	✓	...
3	×	×	×	×	...	×	...
4	✓	✓	×	×	...	✓	...
...
$\langle D \rangle$	×	×	✓	✓	...	?	...
...

Teorema 4

Conclusão

Se houvesse solução para o problema de determinar se uma Máquina de Turing não aceita uma cadeia qualquer ($\overline{L_u}$), haveria solução para o problema, mais simples, de determinar se uma Máquina de Turing não aceita uma cadeia específica (L_d).

Linguagens e complementos

Resumo até este ponto

- ▶ $L_d = \{w_i | w_i \notin L(M_i)\}$ é não-RE;
- ▶ $\overline{L_d} = \{w_i | w_i \in L(M_i)\}$ é RE não-recursiva;
- ▶ $L_u = \{\langle M \rangle w | M \text{ é uma MT que aceita } w\}$ é RE não-recursiva;
- ▶ $\overline{L_u} = \{\langle M \rangle w | M \text{ é uma MT que não aceita } w\}$ é não-RE.

Conceito

- ▶ Técnica para determinar a decidibilidade de um problema a partir de outro cuja natureza é conhecida;
- ▶ Uma redução é uma maneira de converter um problema em outro de tal forma que uma solução para o segundo problema possa ser usada para resolver o primeiro problema;

Exemplos

Uma solução para P_2 é uma solução para P_1 :

- ▶ P_1 : orientar-se numa nova cidade;
 P_2 : obter um mapa;
- ▶ P_1 : viajar de São Paulo para New York;
 P_2 : comprar uma passagem de avião;
- ▶ P_1 : comprar uma passagem de avião;
 P_2 : dispor do dinheiro necessário;
- ▶ P_1 : dispor do dinheiro necessário;
 P_2 : conseguir um trabalho.

Exemplos

Uma solução para P_2 é uma solução para P_1 :

- ▶ P_1 : medir a área de um retângulo;
 P_2 : medir o seu comprimento e largura;
- ▶ P_1 : resolver um sistema de equações lineares;
 P_2 : inverter uma matriz;
- ▶ P_1 : provar que uma linguagem L não é regular;
 P_2 : encontrar $w = xyz \in L$ tal que $|w| > n$, $|y| \geq 1$ e, para algum $i \geq 0$, $xy^iz \notin L$;
- ▶ P_1 : construir um analisador sintático determinístico para uma linguagem L ;
 P_2 : obter uma gramática $LR(k)$ que gera L .

Conceito

Se existe uma redução de P_1 para P_2 , então diz-se que:

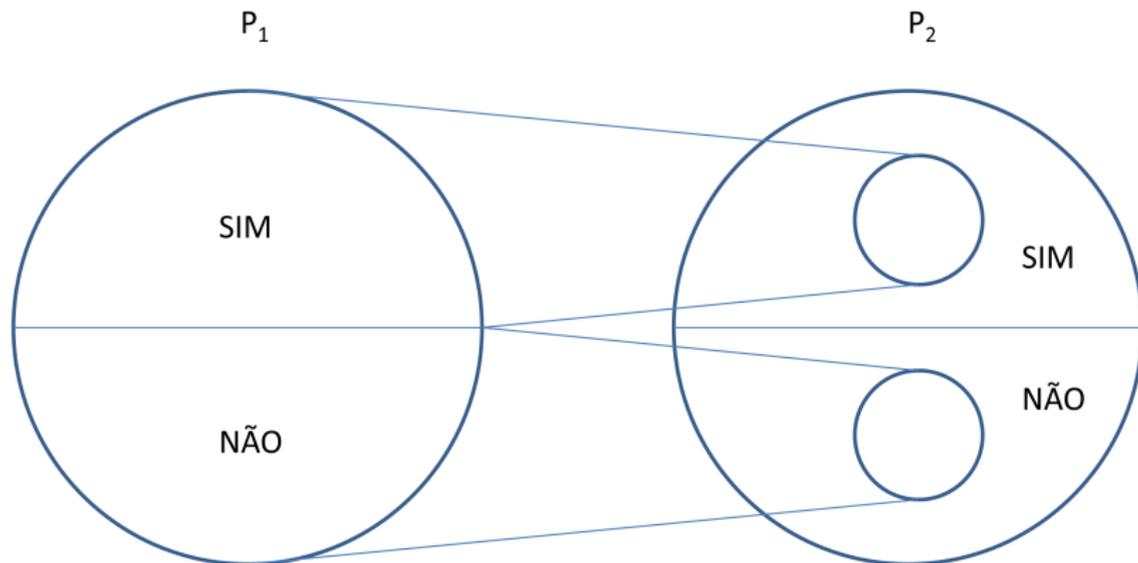
- ▶ P_1 “não é mais difícil do que” P_2 ;
- ▶ P_2 “é no mínimo tão difícil quanto” P_1 .

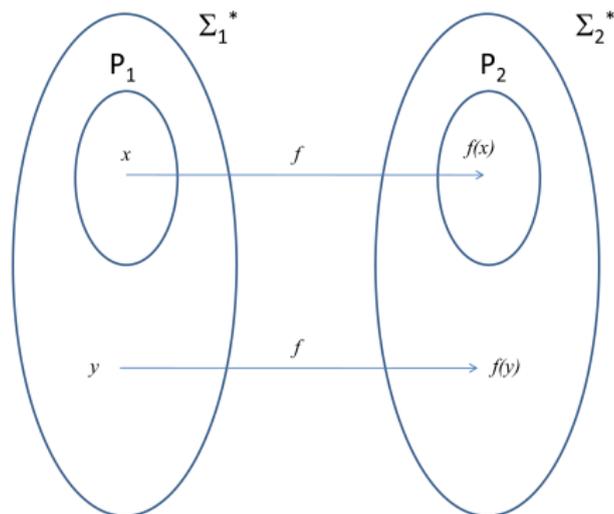
Definição

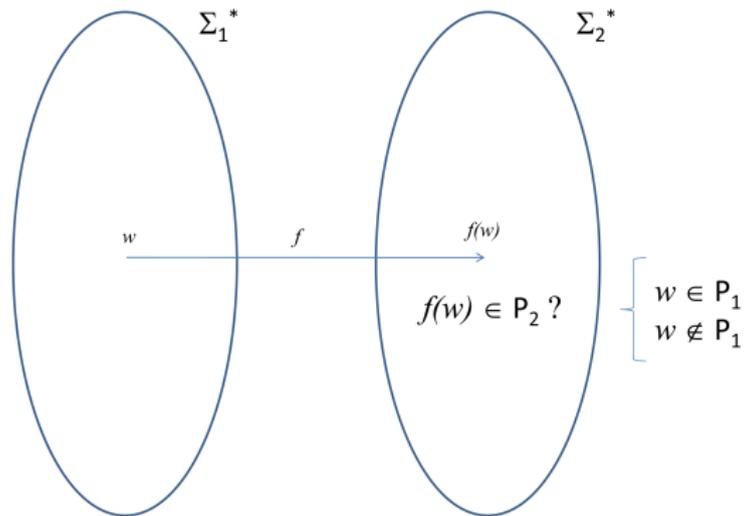
- ▶ Uma redução de P_1 para P_2 é uma função f que mapeia sentenças de P_1 para sentenças de P_2 :

$$w \in P_1 \Leftrightarrow f(w) \in P_2$$

- ▶ Uma redução também pode ser vista como uma MT (algoritmo) que mapeia sentenças de P_1 em sentenças de P_2 ;
- ▶ A função de mapeamento não necessita ser sobrejetora.

Redução de P_1 para P_2 

Redução de P_1 para P_2 

Redução de P_1 para P_2 

Teorema 5

Enunciados

Se f é uma redução de P_1 para P_2 , então:

- 1 Se P_1 é indecidível, então P_2 também é indecidível;
- 2 Se P_1 é não-RE, então P_2 também é não-RE.

Teorema 5

P_1 indecível $\Rightarrow P_2$ indecível

Suponha que P_2 seja decidível. Então é possível combinar o algoritmo que decide P_2 com a redução f para obter um algoritmo que decide P_1 .

- ▶ Seja $w \in \Sigma_1^*$ (Σ_1 é o alfabeto de P_1);
- ▶ Obter $f(w)$;
- ▶ Como P_2 é decidível, por hipótese, é possível determinar se $f(w) \in P_2$;
- ▶ Em caso afirmativo, e como f é uma redução, é certo que $w \in P_1$;
- ▶ Em caso negativo, e como f é uma redução, é certo que $w \notin P_1$;
- ▶ Em qualquer caso é possível determinar se $w \in P_1$;
- ▶ Logo, P_1 seria decidível;
- ▶ Mas isso contrária a hipótese, portanto P_2 não pode ser decidível.

Teorema 5

P_1 não-RE \Rightarrow P_2 não-RE

Suponha que P_2 seja RE. Então é possível combinar a MT M_2 que aceita P_2 com a redução f para obter uma MT M_1 que aceita P_1 .

- ▶ Seja $w \in \Sigma_1^*$;
- ▶ Obter $f(w)$;
- ▶ Executar M_2 com a entrada $f(w)$;
- ▶ Se M_2 aceita $f(w)$, então $w \in P_1$;
- ▶ Se M_2 não aceita $f(w)$ (M_2 pára e rejeita ou entra em loop), então $w \notin P_1$;
- ▶ Logo, é possível construir M_1 que aceita P_1 ;
- ▶ Mas isso contrária a hipótese, portanto P_2 não pode ser RE.

Teorema 5

Enunciados com corolários

Se f é uma redução de P_1 para P_2 , então:

- 1 Se P_1 é indecidível, então P_2 também é indecidível;
Se P_2 é decidível, então P_1 também é decidível;
- 2 Se P_1 é não-RE, então P_2 também é não-RE;
Se P_2 é RE, então P_1 também é RE.

Teorema 5

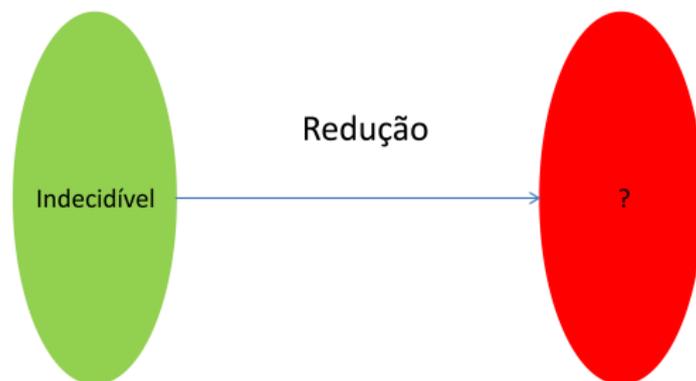
Estratégias

Aplicação do teorema (parte 1):

- ▶ Para demonstrar que um problema P_2 de natureza desconhecida é indecidível:
 - ▶ Obter uma redução de um problema P_1 , reconhecidamente indecidível, para P_2 ;
- ▶ Para demonstrar que um problema P_1 de natureza desconhecida é decidível:
 - ▶ Obter uma redução de P_1 para um problema P_2 , reconhecidamente decidível;

Teorema 5

Estratégias



Teorema 5

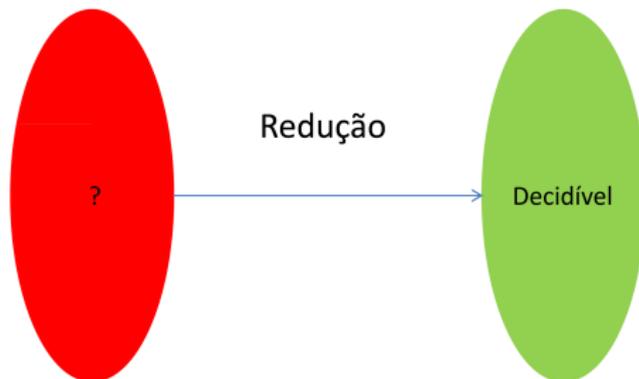
Estratégias

E o contrário? Haveria interesse em reduzir um problema P_1 de natureza desconhecida para um problema P_2 reconhecidamente indecidível?

- ▶ Qual o interesse em fazer isso?
- ▶ Como P_2 é indecidível, tal fato não permite obter nenhuma conclusão em relação à P_1 ;
- ▶ Não adianta para nada, portanto.

Teorema 5

Estratégias



Teorema 5

Estratégias

E o contrário? Haveria interesse em reduzir um problema P_1 reconhecidamente decidível para um problema P_2 de natureza desconhecida?

- ▶ Só seria útil se fosse possível obter f^{-1} (a função de redução inversa);
- ▶ Nesse caso, dada uma instância $w \in P_2$ seria possível combinar a aplicação de f^{-1} com a decisão de P_1 para determinar se $w \in P_1$;
- ▶ Vale lembrar que f não é necessariamente injetora e nem, principalmente, sobrejetora, o que dificulta a obtenção de f^{-1} com as características necessárias;
- ▶ Mas essa estratégia recai exatamente no caso direto;
- ▶ Não adianta nada, portanto.

Teorema 5

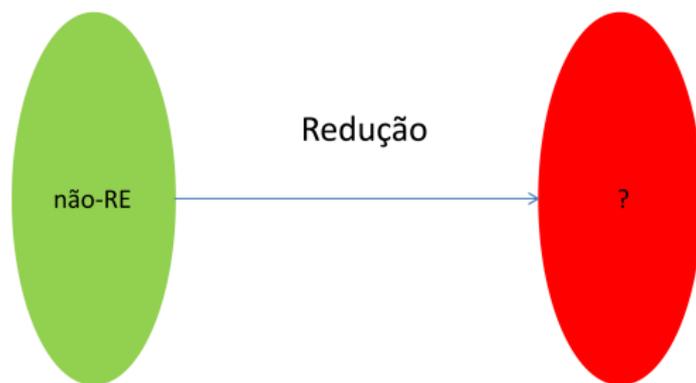
Estratégias

Aplicação do teorema (parte 2):

- ▶ Para demonstrar que um problema P_2 de natureza desconhecida é não-RE:
 - ▶ Obter uma redução de um problema P_1 , reconhecidamente não-RE, para P_2 ;
- ▶ Para demonstrar que um problema P_1 de natureza desconhecida é RE:
 - ▶ Obter uma redução de P_1 para um problema P_2 , reconhecidamente RE;

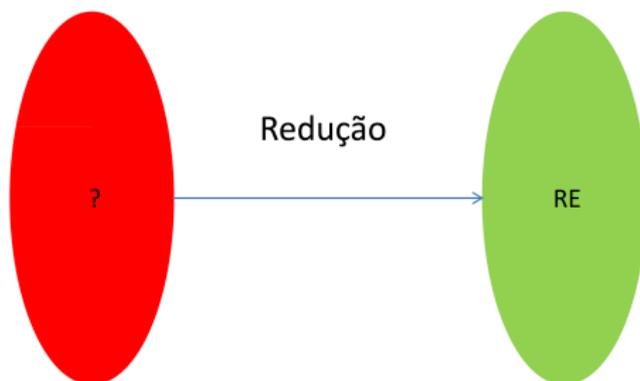
Teorema 5

Estratégias



Teorema 5

Estratégias



Reduções com L_u e L_d

- 1 L_u é indecidível (RE não-recursivo);
- 2 L_d é não-RE;
- 3 L_u pode ser usada para demonstrar que um problema P qualquer (RE ou não-RE) é indecidível:
 - ▶ Basta obter uma redução de L_u para P ;
- 4 L_d pode ser usada para demonstrar que um problema P é não-RE:
 - ▶ Basta obter uma redução de L_d para P ;
- 5 L_d não pode ser usada para demonstrar a indecidibilidade de um problema que é RE porém é não-recursivo (pois L_d é não-RE e só reduz para P não-RE); para esses casos deve-se usar L_u ;
- 6 L_u não pode ser usada para demonstrar que um problema é não-RE (pois L_u é RE não-recursivo e só reduz para P não-recursivo, sem discriminar se P é RE ou não-RE); para esses casos deve-se usar L_d .

Conceito

Suponha que $\langle M \rangle$ representa uma codificação de M sobre o alfabeto $\{0, 1\}$. Suponha que w é uma cadeia sobre esse mesmo alfabeto. A “linguagem da parada” é definida como:

$$PARA_{MT} = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ pára com a entrada } w\}$$

- ▶ Corresponde ao problema fundamental de determinar se um programa qualquer pára com uma entrada qualquer;
- ▶ $PARA_{MT}$ é decidível ou indecidível?

Teorema 6

$PARA_{MT}$ é indecidível através de redução

Função f que reduz L_u para $PARA_{MT}$:

- ▶ $L_u = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ aceita a entrada } w\}$
- ▶ $PARA_{MT} = \{\langle M', w \rangle \mid M' \text{ pára com a entrada } w\}$
- ▶ A redução f é computada pela seguinte MT:
 - ▶ A partir da entrada $\langle M, w \rangle$, construir M' de tal forma que M' simula M com a entrada w ;
 - ▶ Se M aceita w , então M' aceita w ;
 - ▶ Se M rejeita w , então M' entra em loop (e, naturalmente, se M entra em loop, então M' também entra em loop);
- ▶ $\langle M, w \rangle \in L_u \Leftrightarrow \langle M', w \rangle \in PARA_{MT}$;
- ▶ Como L_u é indecidível, $PARA_{MT}$ também é indecidível.

Teorema 6

$PARA_{MT}$ é indecidível através de redução

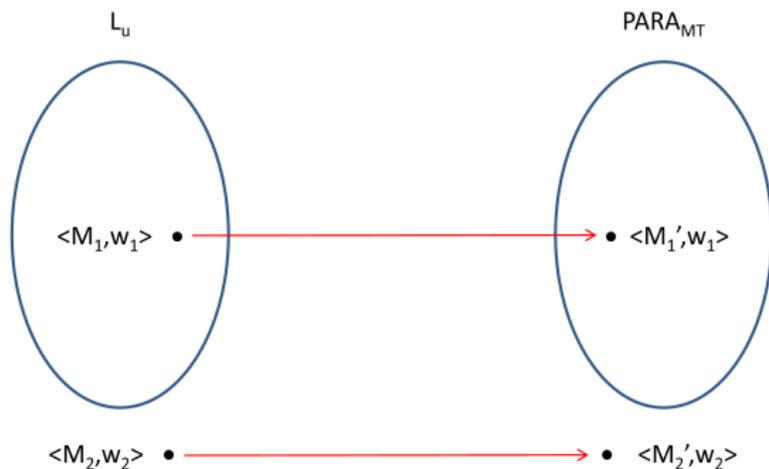
Obtenção de $\langle M', w \rangle$ a partir de $\langle M, w \rangle$:

- ▶ M' simula M com a entrada w ;
- ▶ Se M aceita w , $\langle M, w \rangle \in L_u$ e M' deve aceitar w , pois dessa forma $\langle M', w \rangle \in PARA_{MT}$;
- ▶ Se M rejeita w , $\langle M, w \rangle \notin L_u$ e M' deve entrar em loop infinito, pois dessa forma $\langle M', w \rangle \notin PARA_{MT}$;
- ▶ Se M entra em loop infinito com w , $\langle M, w \rangle \notin L_u$ e M' entra automaticamente em loop infinito também. Portanto, $\langle M', w \rangle \notin PARA_{MT}$;

Logo, $\langle M, w \rangle \in L_u \Leftrightarrow \langle M', w \rangle \in PARA_{MT}$

Teorema 6

$PARA_{MT}$ é indecidível através de redução



Teorema 6

 $PARA_{MT}$ é RE

Basta simular M com a entrada w e gerar, na saída, o mesmo resultado da simulação.

- ▶ $PARA_{MT} = \{\langle M', w \rangle \mid M' \text{ pára com a entrada } w\}$ é RE não-recursiva, portanto o problema é parcialmente solucionável;
- ▶ $\overline{PARA_{MT}} = \{\langle M', w \rangle \mid M' \text{ entra em loop com a entrada } w\}$, no entanto, é não-RE, e portanto completamente insolúvel.

Teorema 6

$PARA_{MT}$ é indecível através de contradição

Suponha que $PARA_{MT}$ é decidível. Então, a partir da MT R que decide $PARA_{MT}$, é possível obter uma outra MT S que decide L_u :

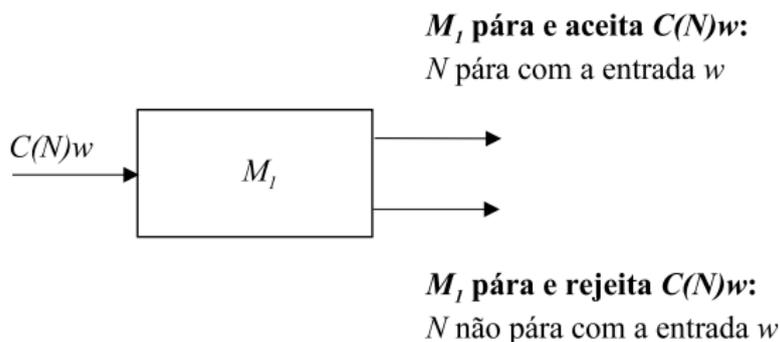
- ▶ Executar R sobre a entrada $\langle M, w \rangle$;
- ▶ Se R rejeita, S também rejeita;
- ▶ Se R aceita, simular M com a entrada w até M parar;
- ▶ Se M aceita, S também aceita;
- ▶ Se M rejeita, S também rejeita.

Se R decide $PARA_{MT}$, então S decide L_u . Como é sabido que L_u é indecível, a hipótese de que R existe é falsa e $PARA_{MT}$ é indecível.

Teorema 6

$PARA_{MT}$ é indecível através de diagramas

Supor que $PARA_{MT}$ é decidível. Então existe M_1 :



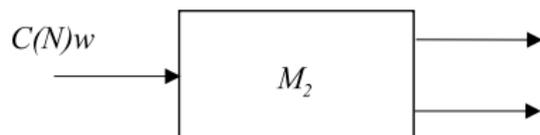
Teorema 6

$PARA_{MT}$ é indecidível através de diagramas

Construir M_2 a partir de M_1 :

M_2 executa uma seqüência infinita de movimentações:

N pára com a entrada w



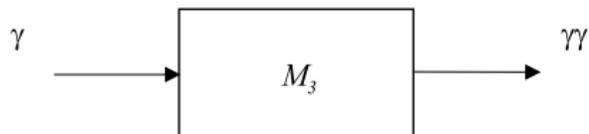
M_2 pára e rejeita $C(N)w$:

N não pára com a entrada w

Teorema 6

PAR_{MT} é indecidível através de diagramas

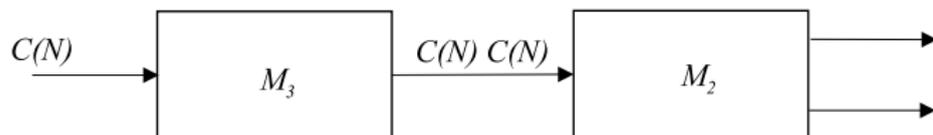
Construir M_3 :



Teorema 6

PAR_{MT} é indecidível através de diagramas

Combinar M_3 e M_2 :



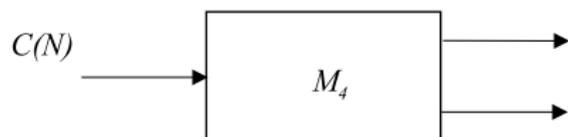
M_2 executa uma seqüência infinita de movimentações:
 N pára com a entrada $C(N)$

M_2 pára:
 N não pára com a entrada $C(N)$

Teorema 6

$PARA_{MT}$ é indecidível através de diagramas

Renomear para M_4 :



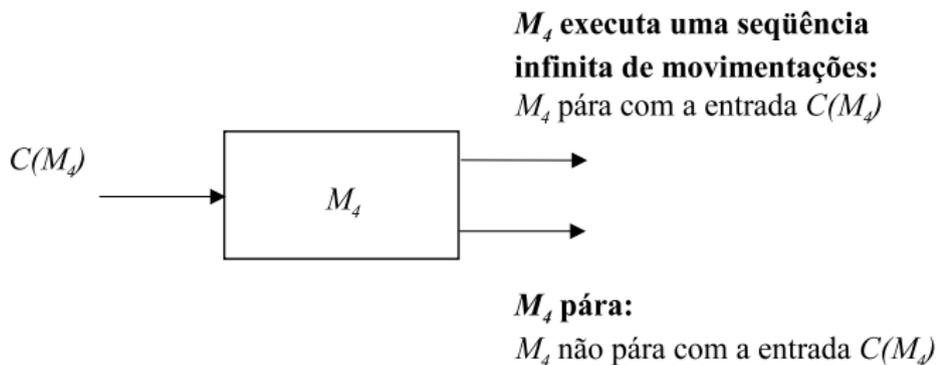
M_4 executa uma seqüência
infinita de movimentações:
 N pára com a entrada $C(N)$

M_4 pára:
 N não pára com a entrada $C(N)$

Teorema 6

$PARA_{MT}$ é indecível através de diagramas

Fornecer para M_4 a sua própria descrição:



Teorema 6

$PARA_{MT}$ é indecidível através de diagramas

Conclusão:

- ▶ Por um lado, temos a informação de que, ao analisar a cadeia $C(M_4)$, se a máquina M_4 parar, então M_4 executa uma seqüência infinita de movimentações;
- ▶ Por outro, que ao analisar a cadeia $C(M_4)$, se M_4 não parar, então M_4 pára. Tem-se, portanto, uma contradição;
- ▶ Logo, a hipótese inicial não é válida, ou seja, não existe M_1 que decida $PARA_{MT}$;
- ▶ $PARA_{MT}$ é indecidível.

Linguagens e complementos

Resumo até este ponto

- ▶ $L_d = \{w_i | w_i \notin L(M_i)\}$ é não-RE;
- ▶ $\overline{L_d} = \{w_i | w_i \in L(M_i)\}$ é RE não-recursiva;
- ▶ $L_u = \{\langle M \rangle w | M \text{ é uma MT que aceita } w\}$ é RE não-recursiva;
- ▶ $\overline{L_u} = \{\langle M \rangle w | M \text{ é uma MT que não aceita } w\}$ é não-RE;
- ▶ $PARA_{MT} = \{\langle M', w \rangle | M' \text{ pára com a entrada } w\}$ é RE não-recursiva;
- ▶ $\overline{PARA_{MT}} = \{\langle M', w \rangle | M' \text{ entra em loop com a entrada } w\}$ é não-RE.

Definições

Considere $\langle M \rangle$ como a codificação de uma MT M sobre o alfabeto $\{0, 1\}$.
Então:

- ▶ $L_e = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset\}$
- ▶ $L_{ne} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \neq \emptyset\}$
- ▶ $L_e = \overline{L_{ne}}$

L_{ne} é RE

Teorema: A linguagem L_{ne} é recursivamente enumerável.

Prova:

1. Construir uma MT M que aceita como entrada a codificação de uma outra MT M' ;
2. M opera de forma não-determinística, fazendo escolhas de cadeias arbitrárias para serem testadas em M' ;
3. Em cada ramo da sua execução não-determinística, M gera uma cadeia e testa se M' aceita a mesma;
4. Para isso, M simula a máquina U que aceita a linguagem L_u ;
5. Se algum caminho de M' for de aceitação, então M' pára e aceita a sua entrada (M);

L_{ne} é RE

Exemplo: Geração não-determinística de cadeias arbitrárias sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$ para serem posteriormente testadas:



L_{ne} é RE

Em resumo:

- ▶ Se M' aceita alguma cadeia, M “adivinha” essa cadeia e aceita M' ;
- ▶ Se M' não aceita nenhuma cadeia, então não há cadeia que conduza à aceitação em M' e M não aceita M' (nesse caso, M pode rejeitar M' ou entrar em loop);
- ▶ Portanto, $L(M) = L_{ne}$.

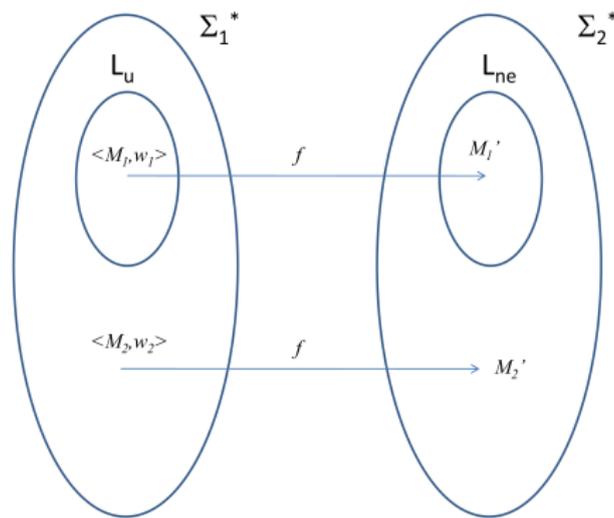
L_{ne} não é recursiva

Idéia geral:

- ▶ Fazer uma redução de L_u para L_{ne} ;
- ▶ Construir M' a partir de $\langle M, w \rangle$ tal que:
 - ▶ Se $w \in L(M)$, então $L(M') \neq \emptyset$;
 - ▶ Se $w \notin L(M)$, então $L(M') = \emptyset$;
- ▶ M' ignora a sua entrada e simula M com a entrada w ;
- ▶ Se M aceita w , M' também aceita a sua entrada, qualquer que seja ela.

L_{ne} não é recursiva

- ▶ M_1 aceita $w_1 \Rightarrow \langle M_1, w_1 \rangle \in L_u \Rightarrow L(M'_1) \neq \emptyset \Rightarrow \langle M'_1 \rangle \in L_{ne}$;
- ▶ M_2 não aceita $w_2 \Rightarrow \langle M_2, w_2 \rangle \notin L_u \Rightarrow L(M'_2) = \emptyset \Rightarrow \langle M'_2 \rangle \notin L_{ne}$;



L_{ne} não é recursiva

Teorema: A linguagem L_{ne} não é recursiva.

Prova:

1. É suficiente provar a existência de um algoritmo que efetua a redução de L_u para L_{ne} ;
2. O algoritmo deve mapear $\langle M, w \rangle$ em M' de tal forma que $w \in L(M) \Leftrightarrow L(M') \neq \emptyset$;
3. A construção de M' a partir de $\langle M, w \rangle$ é detalhada a seguir;

L_{ne} não é recursiva

4. M' ignora a sua entrada x , qualquer que seja ela. M' substitui x por $\langle M, w \rangle$, tomando o cuidado de trocar os símbolos finais de x por brancos, caso $|x| > |\langle M, w \rangle|$;
5. M' posiciona a cabeça de leitura/escrita sobre o primeiro símbolo da cadeia $\langle M, w \rangle$;
6. M' simula a Máquina Universal U com a entrada $\langle M, w \rangle$;
7. Se U aceita $\langle M, w \rangle$, então M' pára e aceita a sua entrada, qualquer que seja ela e $L(M') \neq \emptyset$ (e se U não aceita $\langle M, w \rangle$, então M' não aceita nenhuma entrada e $L(M') = \emptyset$).

L_{ne} não é recursiva

Em resumo:

- ▶ Existe um algoritmo que reduz L_u para L_{ne} ;
 - ▶ M' aceita qualquer cadeia de entrada (e portanto $\langle M' \rangle \in L_{ne}$) sse $w \in L(M)$ (ou seja, se $\langle M, w \rangle \in L_u$);
 - ▶ M' não aceita nenhuma cadeia de entrada (e portanto $\langle M' \rangle \notin L_{ne}$) sse $w \notin L(M)$ (ou seja, se $\langle M, w \rangle \notin L_u$);
- ▶ Como L_u é indecidível, então L_{ne} é indecidível.

L_{ne} não é recursiva

Suponha que L_{ne} fosse decidível. Então seria possível decidir L_u , da seguinte forma:

- ▶ Fazer a redução de $\langle M, w \rangle$ para M' ;
- ▶ Decidir se $L(M') \neq \emptyset$, ou seja, se $\langle M' \rangle \in L_{ne}$;
- ▶ Em caso afirmativo, $\langle M, w \rangle \in L_u$, ou seja, $w \in L(M)$;
- ▶ Em caso negativo, $\langle M, w \rangle \notin L_u$, ou seja, $w \notin L(M)$;

Mas como é sabido que L_u não é recursiva, então a suposição de que L_{ne} é recursiva é falsa.

L_e é não-RE

Teorema: L_e não é recursivamente enumerável.

Prova:

1. Suponha que L_e seja recursivamente enumerável;
2. Portanto, de acordo com um teorema anterior, tanto L_e quanto $\overline{L_e}$ devem ser recursivas;
3. Mas $\overline{L_e} = L_{ne}$;
4. Além disso, foi demonstrado que L_{ne} não é recursiva;
5. Logo, L_e não é recursivamente enumerável.

Linguagens e complementos

Resumo até este ponto

- ▶ $L_d = \{w_i | w_i \notin L(M_i)\}$ é não-RE;
- ▶ $\overline{L_d} = \{w_i | w_i \in L(M_i)\}$ é RE não-recursiva;
- ▶ $L_u = \{\langle M \rangle w | M \text{ é uma MT que aceita } w\}$ é RE não-recursiva;
- ▶ $\overline{L_u} = \{\langle M \rangle w | M \text{ é uma MT que não aceita } w\}$ é não-RE;
- ▶ $PARA_{MT} = \{\langle M', w \rangle | M' \text{ pára com a entrada } w\}$ é RE não-recursiva;
- ▶ $\overline{PARA_{MT}} = \{\langle M', w \rangle | M' \text{ entra em loop com a entrada } w\}$ é não-RE;
- ▶ $L_e = \{\langle M \rangle | L(M) = \emptyset\}$ é não-RE;
- ▶ $L_{ne} = \overline{L_e} = \{\langle M \rangle | L(M) \neq \emptyset\}$ é RE não-recursiva.

Enunciado

Teorema: Qualquer propriedade não-trivial das linguagens recursivamente enumeráveis é indecidível.

- ▶ Propriedade?
- ▶ Não-trivial?

Propriedade não-trivial

Propriedade:

- ▶ Condição que deva ser satisfeita por um grupo de linguagens;
- ▶ Um conjunto de linguagens que satisfazem uma certa condição.

Não-trivial:

- ▶ Condição que seja satisfeita por pelo menos uma linguagem e que não seja satisfeita por pelo menos uma linguagem;
- ▶ Caso contrário, ou seja, se a propriedade é satisfeita por todas as linguagens ou então não é satisfeita por nenhuma linguagem, então ela é dita “trivial”;
- ▶ Propriedade não-trivial exclui todas as propriedades triviais.

As linguagens RE serão representadas pelas MT que as aceitam, pois essas máquinas são descrições finitas de tais linguagens.

Exemplos

Dada uma MT M qualquer:

- ▶ $L(M) = \emptyset$? $L(M) \neq \emptyset$?
- ▶ $\epsilon \in L(M)$?
- ▶ $w \in L(M)$?
- ▶ $L(M)$ é finita? $L(M)$ é infinita?
- ▶ $L(M)$ contém pelo menos duas cadeias?
- ▶ $L(M)$ é regular?
- ▶ $L(M)$ é livre de contexto?
- ▶ $L(M) = \Sigma^*$?
- ▶ $L(M) = L(M)^R$?
- ▶ etc.

Exemplos

- ▶ $L(M) = \emptyset$?

Demonstrada indecidível anteriormente através do problema de decisão L_e ($\langle M \rangle \in L_e$?)

- ▶ $L(M) \neq \emptyset$?

Demonstrada indecidível anteriormente através do problema de decisão L_{ne} ($\langle M \rangle \in L_{ne}$?)

- ▶ Demais propriedades:

Considerar \mathcal{P} como o conjunto de todas as linguagens que satisfazem a propriedade;

Considerar a linguagem $L_{\mathcal{P}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \in \mathcal{P}\}$;

$L_{\mathcal{P}}$ é o conjunto de todas as codificações de Máquinas de Turing que aceitam as linguagens pertencentes à \mathcal{P} ;

Determinar se $L(M) \in \mathcal{P}$ é o mesmo que determinar se $\langle M \rangle \in L_{\mathcal{P}}$.

Demonstração

Teorema: Qualquer propriedade não-trivial das linguagens recursivamente enumeráveis é indecidível.

Prova:

1. Seja \mathcal{P} uma propriedade não-trivial das linguagens RE;
2. Suponha que a linguagem vazia (\emptyset) não pertence a \mathcal{P} ;
3. Como \mathcal{P} é não-trivial, então existe pelo menos uma linguagem $L \in \mathcal{P}$;
4. Considere essa linguagem L e M_L tal que $L = L(M_L)$;
5. Fazer uma redução de L_u para $L_{\mathcal{P}}$ (conforme explicado a seguir):
 - ▶ M aceita $w \Rightarrow M'$ aceita L , portanto $M' \in L_{\mathcal{P}}$;
 - ▶ M não aceita $w \Rightarrow M'$ aceita \emptyset , portanto $M' \notin L_{\mathcal{P}}$.
6. Como L_u é indecidível, conclui-se que $L_{\mathcal{P}}$ também é indecidível.

Redução de L_u para $L_{\mathcal{P}}$

Obtenção de M' a partir de $\langle M, w \rangle$ tal que $\langle M, w \rangle \in L_u \Leftrightarrow \langle M' \rangle \in L_{\mathcal{P}}$:
(lembrar que $L = L(M_L) \in \mathcal{P}$)

1. M' simula a Máquina Universal U com a entrada $\langle M, w \rangle$;
2. Se M não aceita w (ou seja, se $\langle M, w \rangle \notin L_u$), então M' não faz nada. Portanto, M' não aceita a sua entrada, qualquer que seja ela; logo, $L(M') = \emptyset$; como $\emptyset \notin \mathcal{P}$, então $\langle M' \rangle \notin L_{\mathcal{P}}$;
3. Se M aceita w , então M' simula M_L com a sua entrada original, qualquer que seja ela; logo, $L(M') = L$; como $L \in \mathcal{P}$, então $\langle M' \rangle \in L_{\mathcal{P}}$;

Observar que todas as sentenças de L_u reduzem para uma mesma sentença $\langle M' \rangle$ (que aceita M_L) de $L_{\mathcal{P}}$, e também que todas as cadeias que não pertencem à L_u reduzem para a mesma cadeia $\langle M' \rangle$ (que aceita \emptyset) que não pertence à $L_{\mathcal{P}}$.

Conclusão

A demonstração do teorema considerou que a linguagem vazia (\emptyset) não pertence à \mathcal{P} ;

E se a linguagem vazia (\emptyset) pertencer à \mathcal{P} ?

- ▶ Considerar $\overline{\mathcal{P}}$
- ▶ Dessa maneira, $\emptyset \notin \overline{\mathcal{P}}$
- ▶ Considerar $L_{\overline{\mathcal{P}}}$
- ▶ Aplicar os mesmos passos da demonstração do teorema para $L_{\overline{\mathcal{P}}}$
- ▶ Conclui-se que $L_{\overline{\mathcal{P}}}$ não é recursiva
- ▶ Observar que $L_{\overline{\mathcal{P}}} = \overline{L_{\mathcal{P}}}$
- ▶ Se $\overline{L_{\mathcal{P}}}$ não é recursiva, então $L_{\mathcal{P}}$ não é recursiva, pois o complemento de uma linguagem recursiva é também uma linguagem recursiva;
- ▶ Portanto $L_{\mathcal{P}}$ não é recursiva da mesma forma.

Exemplo

O problema de determinar se a linguagem aceita por uma Máquina de Turing é livre de contexto é indecidível.

- ▶ Pelo Teorema de Rice, é suficiente provar que “ser livre de contexto” é uma propriedade não-trivial das linguagens recursivamente enumeráveis;
- ▶ Ou seja, basta apresentar duas linguagens RE, uma que seja livre de contexto e outra que não seja;
- ▶ A linguagem $\{a^i b^i c^i \mid i \geq 0\}$ é RE mas não é livre de contexto;
- ▶ A linguagem $\{a^i b^i \mid i \geq 0\}$ é RE e livre de contexto.

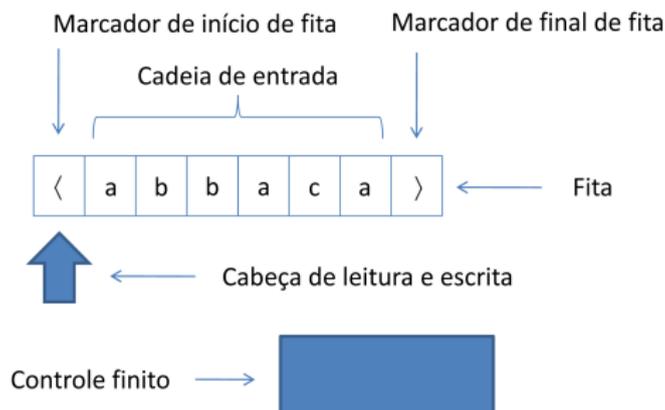
E se \mathcal{P} for trivial?

Então \mathcal{P} é decidida por uma MT que sempre aceita (se \mathcal{P} contém todas as linguagens) ou sempre rejeita (se $\mathcal{P} = \emptyset$). O teorema, nesses casos, não pode ser aplicado:

- ▶ \mathcal{P} contém todas as linguagens \Rightarrow o passo 2 da prova do teorema não é verificado;
- ▶ $\mathcal{P} = \emptyset \Rightarrow$ o passo 3 da prova do teorema não é verificado;

Conceito

Um Autômato Linearmente Limitado (ALL), também conhecido como Máquina de Turing com Fita Limitada, é uma Máquina de Turing na qual o tamanho da fita de entrada é limitada ao comprimento da cadeia a ser analisada.



Formalização

Um Autômato Linearmente Limitado (ALL) é uma 8-upla:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \langle, \rangle, F)$$

onde:

- ▶ Q é o conjunto de estados;
- ▶ Σ é o alfabeto de entrada;
- ▶ Γ é o alfabeto de símbolos que podem ser lidos e/ou escritos na fita, $\Sigma \subseteq \Gamma$;
- ▶ δ é a função de transição;
- ▶ \langle e \rangle são os símbolos que delimitam a cadeia de entrada na fita, $\langle \notin \Gamma, \rangle \notin \Gamma$;
- ▶ F é o conjunto de estados finais.

O ALL não pode se movimentar para à direita do símbolo \rangle nem para a esquerda do símbolo \langle e nem pode substituí-los por outros símbolos.

Observações

- ▶ Um ALL é um caso particular de MT em que a movimentação da cabeça de leitura/escrita é limitada ao trecho da fita que contém a cadeia de entrada a ser analisada;
- ▶ A quantidade de memória de trabalho disponível depende do alfabeto Γ e cresce linearmente com o comprimento da cadeia de entrada (por isso o nome “Linearmente Limitado”);
- ▶ Demonstra-se que a classe das linguagens reconhecidas pelos ALL coincide com a classe das linguagens geradas pelas gramáticas sensíveis ao contexto (a menos da cadeia vazia):

Quantidade máxima de configurações

Lema: Seja M um ALL com $|Q|$ estados, $|\Gamma|$ símbolos no seu alfabeto de fita e uma cadeia de entrada w , $|w| = n$. Então existem exatamente $|Q| * (n + 2) * |\Gamma|^n$ configurações distintas para M .

Prova:

1. A configuração é uma tripla composta por estado, posição da cabeça de leitura/escrita na fita e conteúdo da fita;
2. M possui $|Q|$ estados distintos;
3. A cabeça de leitura/escrita pode se encontrar em $n + 2$ posições distintas;
4. Existem $|\Gamma|^n$ combinações diferentes de conteúdo para a fita de entrada;
5. Portanto, existem $|Q| * (n + 2) * |\Gamma|^n$ configurações distintas para M .

Problema A_{ALL}

Aceitação em Autômatos Linearmente Limitados:

$$A_{ALL} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ é um } ALL \text{ que aceita a cadeia } w \}$$

Teorema: A_{ALL} é uma linguagem decidível.

Prova:

1. Suponha que o ALL seja $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \langle, \rangle, F)$;
2. Suponha $|w| = n$;
3. Construir M' que simula M com a entrada w :
 - ▶ Simular até que M pare ou até que tenham sido executadas $|Q| * (n + 2) * |\Gamma|^n - 1$ movimentações;
 - ▶ Se M pára e aceita, então M' pára e aceita;
 - ▶ Se M pára e rejeita, então M' pára e rejeita;
 - ▶ Se M não parou, então M' rejeita.

Problema A_{ALL}

Importante observar:

- ▶ O problema da aceitação em $ALLs$ é decidível;
(a quantidade máxima de configurações distintas que o ALL pode assumir é conhecida e essa informação é usada para detectar loops)
- ▶ O problema da aceitação em MTs é indecidível.
(não existe limitação para a quantidade máxima de configurações distintas que a MT pode assumir)

História de computação

Uma “história de computação” de uma MT M sobre uma cadeia de entrada w é a seqüência de configurações $C_1C_2\dots C_n$ que M assume durante a análise de w .

- ▶ Se $w \in L(M) = ACEITA(M)$ então $C_1C_2\dots C_n$ é uma “história de computação de aceitação” onde C_1 é a configuração inicial, C_n é configuração final de aceitação e C_i segue de forma legítima C_{i-1} , para $1 < i \leq n$;
- ▶ Se $w \in REJEITA(M)$ então $C_1C_2\dots C_n$ é uma “história de computação de rejeição” onde C_1 é a configuração inicial, C_n é configuração final de rejeição e C_i segue de forma legítima C_{i-1} , para $1 < i \leq n$;
- ▶ Se $w \in LOOP(M)$ então $C_1C_2\dots C_n\dots$ é uma seqüência infinita de configurações.

História de computação

Sejam M e w :

- ▶ Se M é determinística, então existe uma única história de computação (de aceitação, de rejeição ou de loop) para w ;
- ▶ Se M é não-determinística, então podem existir várias histórias de computação para w (finitas ou infinitas).

Problema V_{ALL}

Vacuidade da linguagem aceita por um autômato linearmente limitado:

$$V_{ALL} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ é um } ALL \text{ e } L(M) = \emptyset\}$$

Teorema: V_{ALL} é uma linguagem indecidível.

Prova:

- ▶ Suponha que V_{ALL} é decidível;
- ▶ Logo, $\overline{V_{ALL}}$ também é decidível;
- ▶ Fazer uma redução de L_u para $\overline{V_{ALL}}$ usando histórias de computação;
- ▶ Se $\overline{V_{ALL}}$ fosse decidível, então L_u também seria;
- ▶ Como L_u não é decidível, segue que a hipótese é falsa, $\overline{V_{ALL}}$ não é decidível e V_{ALL} não é decidível.

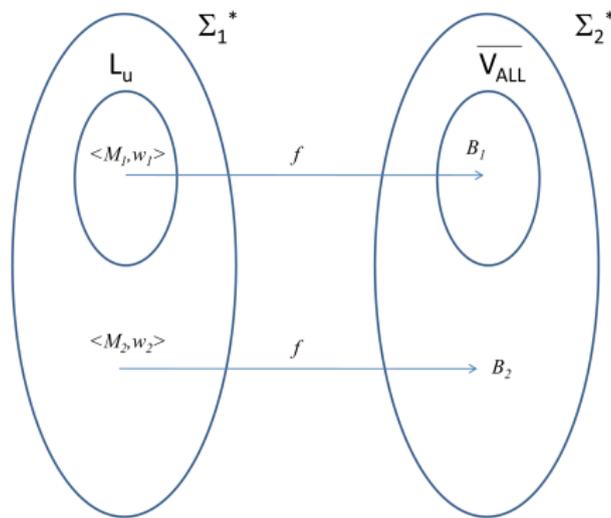
Problema V_{ALL}

Redução de L_u para $\overline{V_{ALL}}$:

- ▶ Construir um ALL B a partir de $\langle M, w \rangle$ tal que:
 $\langle M, w \rangle \in L_u \Leftrightarrow \langle B \rangle \in \overline{V_{ALL}}$
- ▶ O ALL B é construído de forma que $L(B)$ compreende todas as histórias de computação de aceitação de M para w ;
- ▶ Se M rejeita w , ou seja, se $\langle M, w \rangle \notin L_u$, então $L(B) = \emptyset$ e $\langle B \rangle \notin \overline{V_{ALL}}$;
- ▶ Se M aceita w , ou seja, se $\langle M, w \rangle \in L_u$, então $L(B) \neq \emptyset$ e $\langle B \rangle \in \overline{V_{ALL}}$.

Problema V_{ALL}

- ▶ M_1 aceita $w_1 \Rightarrow \langle M_1, w_1 \rangle \in L_u \Rightarrow L(B_1) \neq \emptyset \Rightarrow \langle B_1 \rangle \in \overline{V_{ALL}}$;
- ▶ M_2 não aceita $w_2 \Rightarrow \langle M_2, w_2 \rangle \notin L_u \Rightarrow L(B_2) = \emptyset \Rightarrow \langle B_2 \rangle \notin \overline{V_{ALL}}$;



Problema V_{ALL}

Construção de B a partir de $\langle M, w \rangle$:

1. Suponha que a entrada para B é $C_1 \# C_2 \# \dots \# C_n$;
2. As três condições seguintes devem ser válidas;
3. B verifica se C_1 é uma configuração inicial válida para M com a cadeia w :
 $C_1 = q_0 w$ pode ser verificado conhecendo-se M e w ;
4. B verifica se C_i segue de forma legítima C_{i-1} , para $1 < i \leq n$:
 C_i deve corresponder à combinação da configuração C_{i-1} com a aplicação de uma transição de M ;
5. B verifica se C_n é uma configuração de aceitação para M :
 $C_n = \alpha q_f \beta$ pode ser verificado conhecendo-se M .

Problema V_{ALL}

Examinando por outro ângulo:

- ▶ Deseja-se determinar se $\langle M, w \rangle \in L_u$;
- ▶ Suponha que V_{ALL} é decidível por uma MT R ;
- ▶ A partir de $\langle M, w \rangle$ obter o ALL B conforme descrito;
- ▶ Executar R com a entrada $\langle B \rangle$;
- ▶ Se R aceita, isso significa que $L(B)$ é vazia e portanto que $w \notin L(M)$, ou seja, $\langle M, w \rangle \notin L_u$;
- ▶ Se R rejeita, isso significa que $L(B)$ é não-vazia e portanto que $w \in L(M)$, ou seja, $\langle M, w \rangle \in L_u$;
- ▶ Logo, seria possível decidir L_u ;
- ▶ Mas isso é uma contradição e portanto V_{ALL} não é decidível.

Problema $TODAS_{GLC}$

Totalidade da linguagem gerada por uma gramática livre de contexto:

$$TODAS_{GLC} = \{\langle G \rangle \mid G \text{ é uma } GLC \text{ e } L(G) = \Sigma^*\}$$

Teorema: $TODAS_{GLC}$ é uma linguagem indecidível.

Prova:

- ▶ Suponha que $TODAS_{GLC}$ é decidível;
- ▶ Logo, $\overline{TODAS_{GLC}}$ também é decidível;
- ▶ Fazer uma redução de L_u para $\overline{TODAS_{GLC}}$ usando histórias de computação;
- ▶ Se $\overline{TODAS_{GLC}}$ fosse decidível, então L_u também seria;
- ▶ Como L_u não é decidível, segue que a hipótese é falsa, $\overline{TODAS_{GLC}}$ não é decidível e $TODAS_{GLC}$ não é decidível.

Problema $TODAS_{GLC}$

Redução de L_u para $\overline{TODAS_{GLC}}$

- ▶ Construir uma GLC G a partir de $\langle M, w \rangle$ tal que:
 $\langle M, w \rangle \in L_u \Leftrightarrow \langle G \rangle \in \overline{TODAS_{GLC}}$
- ▶ G gera todas as histórias de computação que não são de aceitação para M com w ;
 - ▶ G gera todas as histórias se e apenas se $w \notin M$;
 - ▶ G não gera todas as histórias se e apenas se $w \in M$; nesse caso, deve G falhar em gerar justamente a história de computação de aceitação para w em M ;

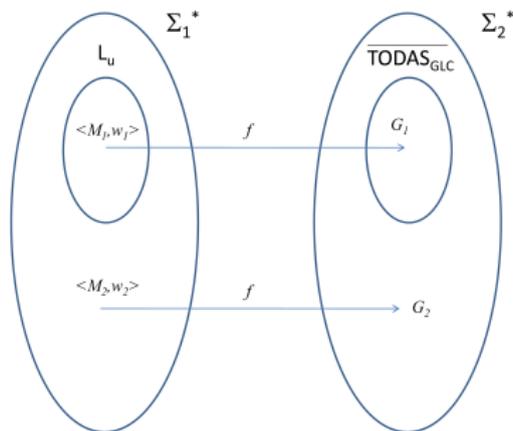
Problema $TODAS_{GLC}$

Redução de L_u para $\overline{TODAS_{GLC}}$ (resumo)

- ▶ Se M não aceita w , ou seja, se $\langle M, w \rangle \notin L_u$, então G não falha em gerar nenhuma história de computação, $L(G) = \Sigma^*$ e $L(G) \notin \overline{TODAS_{GLC}}$;
- ▶ Se M aceita w , ou seja, se $\langle M, w \rangle \in L_u$, então G falha em gerar a história de computação de aceitação de w em M , $L(G) \neq \Sigma^*$ e $\langle G \rangle \in \overline{TODAS_{GLC}}$.

Problema $TODAS_{GLC}$

- ▶ M_1 aceita $w_1 \Rightarrow$
 $\langle M_1, w_1 \rangle \in L_u \Rightarrow L(G_1) \neq \Sigma^* \Rightarrow \langle G_1 \rangle \in \overline{TODAS_{GLC}}$;
- ▶ M_2 não aceita $w_2 \Rightarrow$
 $\langle M_2, w_2 \rangle \notin L_u \Rightarrow L(G_2) = \Sigma^* \Rightarrow \langle G_2 \rangle \notin \overline{TODAS_{GLC}}$;



Problema $TODAS_{GLC}$

Construção de G a partir de $\langle M, w \rangle$:

1. G gera todas as histórias de computação que não são de aceitação para M com w , usando para isso um certo alfabeto Σ ;
2. Histórias de computação de M com w tem o formato $C_1\#C_2\#\dots\#C_n$, sobre o alfabeto Σ ;
3. As sentenças de $L(G)$ devem satisfazer as três condições seguintes;

Problema $TODAS_{GLC}$

- G gera todas as histórias de computação tais que C_1 não é uma configuração inicial válida para M com a cadeia w :
Pode ser feito conhecendo-se M e w ;
- G gera todas as histórias de computação tais que C_i não segue de forma legítima C_{i-1} , para $1 < i \leq n$:
Pode ser feito conhecendo-se M e w ;
- G gera todas as histórias de computação tais que C_n não é uma configuração de aceitação para M :
Pode ser feito conhecendo-se M .

Problema $TODAS_{GLC}$

Construção de G a partir de $\langle M, w \rangle$:

- ▶ Para a linguagem especificada anteriormente, projetar um autômato de pilha não-determinístico (APN) é mais fácil do que projetar a gramática diretamente;
- ▶ Para obter G , iremos inicialmente obter um APN D que aceita $L(G)$;
- ▶ Finalmente, o APN D pode ser convertido para uma GLC G .

Problema $TODAS_{GLC}$

Construção do APN D a partir de $\langle M, w \rangle$:

1. A cadeia de entrada para D é uma história de computação sobre o alfabeto Σ ;
2. D seleciona, de forma não-determinística, qual das três condições ele irá testar;
3. No primeiro ramo, D aceita se C_1 não é uma configuração inicial válida para M com a cadeia w ;
4. No segundo ramo, D seleciona não-deterministicamente um par de configurações C_i (com $i \geq 3$ e ímpar) e C_{i-1} para analisar:
 - ▶ D aceita se C_i não segue de forma legítima C_{i-1}
5. No terceiro ramo, D aceita se C_n não é uma configuração de aceitação para M .

Problema $TODAS_{GLC}$

Observações:

- ▶ No segundo ramo, D empilha a configuração C_{i-1} e depois compara com a configuração C_i ;
- ▶ Para que isso seja possível, será necessário que as configurações de ordem par sejam escritas na cadeia de entrada de forma revertida;
- ▶ $C_1 \# C_2^R \# C_3 \# C_4^R \# \dots$

Problema $TODAS_{GLC}$

Conclusões:

- ▶ D aceita todas as história de computação que não são de aceitação para M com w ;
- ▶ Se $w \notin L(M)$, então $L(D) = L(G) = \Sigma^*$, ou seja, $G \notin \overline{TODAS_{GLC}}$
- ▶ Se $w \in L(M)$, então $L(D) = L(G) \neq \Sigma^*$, ou seja, $G \in \overline{TODAS_{GLC}}$
- ▶ A existência de D prova a existência de G , e, conseqüentemente, a existência de uma redução de L_u para $\overline{TODAS_{GLC}}$. Logo, $\overline{TODAS_{GLC}}$ e $TODAS_{GLC}$ são indecidíveis.

Origem e natureza

“Post’s Correspondence Problem” (Problema da Correspondência de Post)

- ▶ Problema que não está relacionado com Máquinas de Turing ou as linguagens por elas aceitas;
- ▶ Problema combinatorial que envolve a manipulação (emparelhamento) de cadeias de caracteres;
- ▶ Demonstra-se ser indecidível;
- ▶ A indecidibilidade o PCP foi provada por Post em 1946;
- ▶ É usado para demonstrar a indecidibilidade de vários outros problemas.

Definição

Uma “instância” PCP consiste de duas listas A e B de cadeias formadas sobre um mesmo alfabeto Σ . As duas listas devem ter o mesmo comprimento.

- ▶ $A = w_1, w_2, \dots, w_k$;
- ▶ $B = x_1, x_2, \dots, x_k$;
- ▶ Para um certo valor de i , diz-se que o par (w_i, x_i) é um par que está em correspondência;
- ▶ Pares em correspondência podem ser considerados como peças de um dominó:

$$\left[\begin{array}{c} w_1 \\ x_1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} w_2 \\ x_2 \end{array} \right], \dots, \left[\begin{array}{c} w_k \\ x_k \end{array} \right]$$

Solução

Diz-se que uma instância PCP tem uma solução se existir uma seqüência de um ou mais números inteiros (repetições permitidas) i_1, i_2, \dots, i_m , os quais, quando interpretados como índices de cadeias nas listas A e B , produzem como resultado a mesma cadeia.

- ▶ $A = w_1, w_2, \dots, w_k$;
- ▶ $B = x_1, x_2, \dots, x_k$;
- ▶ Diz-se que $i_1, i_2, \dots, i_m, m \geq 1$, é uma solução para esta instância PCP se $w_{i_1}w_{i_2}\dots w_{i_m} = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_m}$

Solução

PCP como um tipo de jogo de dominó:

- ▶ Composto por uma quantidade finita de peças:

$$\left[\begin{array}{c} w_1 \\ x_1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} w_2 \\ x_2 \end{array} \right], \dots, \left[\begin{array}{c} w_k \\ x_k \end{array} \right]$$

- ▶ Peças são combinadas para formar cadeias idênticas na parte de cima e na parte de baixo;
- ▶ Peças podem ser duplicadas para formar cadeias:

$$\left[\begin{array}{c} w_{i_1} \\ x_{i_1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} w_{i_2} \\ x_{i_2} \end{array} \right] \dots \left[\begin{array}{c} w_{i_m} \\ x_{i_m} \end{array} \right]$$

Exemplo

Seja $\Sigma = \{0, 1\}$ e suponha que as listas A e B sejam as seguintes:

	Lista A	Lista B
i	w_i	x_i
1	1	111
2	10111	10
3	10	0

- Uma solução para essa instância é a seqüência:

$i_1 = 2, i_2 = 1, i_3 = 1, i_4 = 3$, ou simplesmente 2, 1, 1, 3, pois

$$w_2 w_1 w_1 w_3 = \underbrace{10111}_{w_2} \underbrace{1}_{w_1} \underbrace{1}_{w_1} \underbrace{10}_{w_3} =$$

$$x_2 x_1 x_1 x_3 = \underbrace{10}_{x_2} \underbrace{111}_{x_1} \underbrace{111}_{x_1} \underbrace{0}_{x_3} = 101111110;$$

- Entre outras, 2, 1, 1, 3, 2, 1, 1, 3 também é solução.

Exemplo

Continuação

- Representação da solução 2, 1, 1, 3 na forma de dominós:

$$\begin{array}{cccc}
 w_2 & w_1 & w_1 & w_3 \\
 \left[\begin{array}{c} 10111 \\ \hline 10 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 111 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 111 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} 10 \\ \hline 0 \end{array} \right] \\
 x_2 & x_1 & x_1 & x_3
 \end{array}$$

Exemplo

Seja $\Sigma = \{a, b, c\}$ e suponha que as listas A e B sejam as seguintes:

	Lista A	Lista B
i	w_i	x_i
1	abc	ab
2	ca	a
3	acc	ba

- ▶ Essa instância não possui solução, pois $|w_i| > |x_i|, \forall i$.

Exemplo

Seja $\Sigma = \{0, 1\}$ e suponha que as listas A e B sejam as seguintes:

	Lista A	Lista B
i	w_i	x_i
1	10	101
2	011	11
3	101	011

- ▶ Essa instância também não possui solução:
- ▶ Se $i_1 = 2$, então $A = 011\dots$, $B = 11\dots$ e não é possível gerar uma solução;
- ▶ Se $i_1 = 3$, então $A = 101\dots$, $B = 011\dots$ e não é possível gerar uma solução;

Exemplo

Continuação

- ▶ Com $i_1 = 1$, então $A = 10\dots$, $B = 101\dots$ talvez seja possível obter uma solução;
- ▶ Se $i_2 = 1$, então $A = 1010\dots$, $B = 101101\dots$ e não é possível gerar uma solução;
- ▶ Se $i_2 = 2$, então $A = 10011\dots$, $B = 10111\dots$ e não é possível gerar uma solução;
- ▶ Com $i_2 = 3$, então $A = 10101\dots$, $B = 101011\dots$ talvez seja possível obter uma solução;
- ▶ No entanto, o mesmo raciocínio leva à escolha de $i_3 = 3$, e assim por diante, e não é possível nunca gerar uma solução.

Problema

Dada uma instância PCP sobre um certo alfabeto Σ , determinar se ela possui uma solução.

- ▶ $PCP = \{\langle P \rangle \mid P \text{ é uma instância PCP com uma solução}\}$;
- ▶ PCP é indecidível.

Estratégia da demonstração

- 1 Reduzir L_u para uma versão modificada do PCP (MPCP);
- 2 Reduzir MPCP para PCP;
- 3 Como L_u é indecidível, MPCP e PCP são também indecidíveis.



Definição

“Modified Post Correspondence Problem” (Problema da Correspondência de Posto Modificado):

- ▶ Uma instância MPCP é definida da mesma forma que uma instância PCP;
- ▶ A solução, no entanto, deve obrigatoriamente iniciar com o par 1;
- ▶ $A = w_1, w_2, \dots, w_k$;
- ▶ $B = x_1, x_2, \dots, x_k$;
- ▶ Diz-se que $i_1, i_2, \dots, i_m, m \geq 0$, é uma solução para esta instância MPCP se $w_1 w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_m} = x_1 x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}$

Exemplo

Seja $\Sigma = \{0, 1\}$ e suponha que as listas A e B sejam as seguintes:

	Lista A	Lista B
i	w_i	x_i
1	1	111
2	10111	10
3	10	0

- ▶ Considerada como instância PCP, há solução;
- ▶ Considerada como instância MPCP, não há solução.

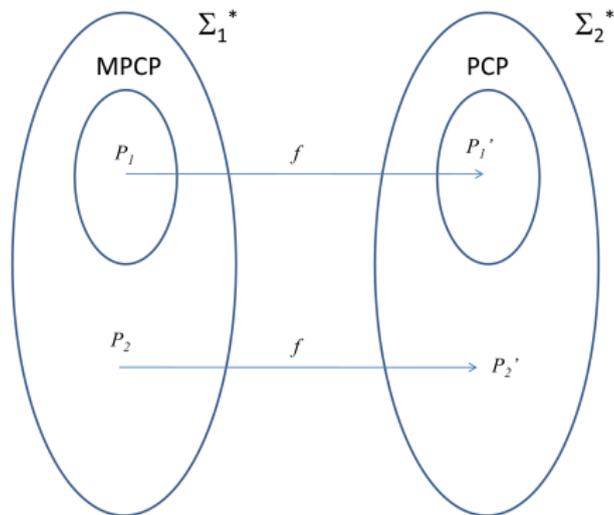
Exemplo

Continuação

- ▶ $A = w_1\dots = 1\dots$, $B = x_1\dots = 111\dots$
- ▶ Se $i_1 = 2$, então $A = 110111\dots$, $B = 11110\dots$ e não há solução possível;
- ▶ Se $i_1 = 3$, então $A = 110\dots$, $B = 1110\dots$ e não há solução possível;
- ▶ Se $i_1 = 1$, então $A = 11\dots$, $B = 111111\dots$ e não há solução possível, pois as cadeias nunca terão o mesmo tamanho.

Redução de MPCP para PCP

P_1 é uma instância MPCP com solução $\Leftrightarrow P'_1$ é uma instância PCP com solução.



Redução de MPCP para PCP

A obtenção de $P'_1(P'_2)$ (PCP) a partir de $P_1(P_2)$ (MPCP) pode ser feita da seguinte forma:

- ▶ MPCP= (A, B) sobre Σ ;
- ▶ Suponha $A = w_1, w_2, \dots, w_k$;
- ▶ Suponha $B = x_1, x_2, \dots, x_k$;
- ▶ Suponha que $* \notin \Sigma, \$ \notin \Sigma$;
- ▶ PCP= (C, D) sobre $\Sigma \cup \{*, \$\}$;
- ▶ $C = y_0, y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1}$;
- ▶ $D = z_0, z_1, z_2, \dots, z_k, z_{k+1}$;

Redução de MPCP para PCP

- ▶ $\forall i, 1 \leq i \leq k$, y_i é obtido a partir de w_i pela inserção do símbolo * após cada símbolo de w_i
- ▶ $\forall i, 1 \leq i \leq k$, z_i é obtido a partir de x_i pela inserção do símbolo * antes cada símbolo de x_i
- ▶ $y_0 = *y_1$
- ▶ $z_0 = z_1$
- ▶ $y_{k+1} = \$$
- ▶ $z_{k+1} = *\$$

Exemplo

Suponha a instância MPCP:

	Lista A	Lista B
i	w_i	x_i
1	1	111
2	10111	10
3	10	0

A aplicação da construção anterior resulta na instância PCP:

	Lista C	Lista D
i	y_i	z_i
0	*1*	*1*1*1
1	1*	*1*1*1
2	1*0*1*1*1*	*1*0
3	1*0*	*0
4	\$	*\$

Redução de MPCP para PCP

Para provar que a construção proposta é uma redução, é necessário (suponha que P_1 reduz para P'_1):

- 1 Provar que se P_1 é uma instância MPCP com solução, então P'_1 é uma instância PCP com solução;
- 2 Provar que se P'_1 é uma instância PCP com solução, então P_1 é uma instância MPCP com solução.

Redução de MPCP para PCP

Se P_1 é uma instância MPCP com solução, então P'_1 é uma instância PCP com solução:

- ▶ Suponha que a solução de P_1 seja i_1, i_2, \dots, i_m ;
- ▶ Portanto, $w_1 w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_m} = x_1 x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}$;
- ▶ Considerar $y_1 y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_m}$ e $z_1 z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_m}$;
- ▶ As duas cadeias são idênticas, exceto pelo primeiro símbolo da primeira cadeia e pelo último símbolo da segunda cadeia;
- ▶ Ou seja, $*y_1 y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_m} = z_1 z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_m} *$;
- ▶ Mas esse resultado pode ser obtido substituindo-se o primeiro par (de 1 por 0) e acrescentando-se um novo par no final ($k + 1$);
- ▶ Ou seja, $y_0 y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_m} y_{k+1} = z_0 z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_m} z_{k+1}$;
- ▶ Logo, $0, i_1, i_2, \dots, i_m, k + 1$ é uma solução de P'_1 .

Redução de MPCP para PCP

Se P'_1 é uma instância PCP com solução, então P_1 é uma instância MPCP com solução:

- ▶ A solução de P'_1 deve começar com o par 0 e terminar com o par $k + 1$, pois apenas o par 0 inicia com o mesmo símbolo (*) e apenas o par $k + 1$ termina com o mesmo símbolo (\$);
- ▶ Portanto, a solução de P'_1 é $0, i_1, i_2, \dots, i_m, k + 1$;
- ▶ Logo, $y_0 y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_m} y_{k+1} = z_0 z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_m} z_{k+1}$;
- ▶ Se forem removidos todos os símbolos * e \$ de ambas as cadeias, resulta:
 - ▶ $w_1 w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_m} = x_1 x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}$;
 - ▶ Ou seja, $1, i_1, i_2, \dots, i_m$ é solução para P_1 .

Redução de MPCP para PCP

Conclusões até o momento:

- ▶ Se PCP for decidível, então MPCP também será decidível;
- ▶ Se MPCP for indecidível, então PCP também será indecidível.

Exemplo

Suponha a instância MPCP:

	Lista A	Lista B
i	w_i	x_i
1	ab	abb
2	bab	ba
3	ba	a
4	a	ba

Exemplo

Continuação

A aplicação da construção anterior resulta na instância PCP:

	Lista C	Lista D
i	y_i	z_i
0	$*a*b*$	$*a*b*b$
1	$a*b*$	$*a*b*b$
2	$b*a*b*$	$*b*a$
3	$b*a*$	$*a$
4	$a*$	$*b*a$
5	$\$$	$*\$$

Exemplo

Continuação

- ▶ Uma solução para a instância MPCP é 3, 2, 4;

$$\text{▶ } y_1 y_3 y_2 y_4 = \underbrace{a * b * b}_{y_1} * \underbrace{a * b}_{y_3} * \underbrace{a * b}_{y_2} * \underbrace{a}_{y_4}$$

$$\text{▶ } z_1 z_3 z_2 z_4 = \underbrace{* a * b * b}_{z_1} * \underbrace{* a}_{z_3} * \underbrace{* b * a}_{z_2} * \underbrace{* b * a}_{z_4}$$

- ▶ Substituir o par 1 pelo par 0 no início e acrescentar o par 5 no final;

$$\text{▶ } y_0 y_3 y_2 y_4 y_5 = \underbrace{* a * b * b}_{y_0} * \underbrace{a * b}_{y_3} * \underbrace{a * b}_{y_2} * \underbrace{a}_{y_4} * \underbrace{\$}_{y_5}$$

$$\text{▶ } z_0 z_3 z_2 z_4 z_5 = \underbrace{* a * b * b}_{z_0} * \underbrace{* a}_{z_3} * \underbrace{* b * a}_{z_2} * \underbrace{* b * a}_{z_4} * \underbrace{* \$}_{z_5}$$

- ▶ Portanto, 0, 3, 2, 4, 5 é uma solução para o PCP correspondente.

Exemplo

Continuação

- ▶ Uma solução para a instância PCP é 0, 3, 5;

$$\text{▶ } y_0 y_3 y_5 = \underbrace{*a * b}_{y_0} \underbrace{* b * a}_{y_3} \underbrace{*}_{y_5} \$ = z_0 z_3 z_5 = \underbrace{*a * b}_{z_0} \underbrace{* b}_{z_3} \underbrace{*a}_{z_5} * \$$$

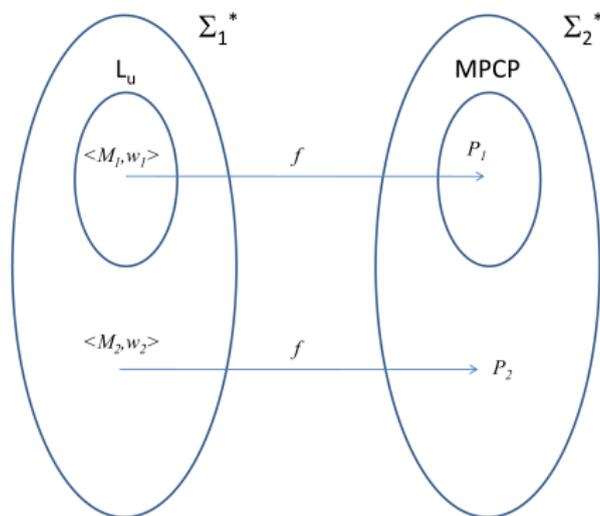
- ▶ Remover todos os símbolos * e \$ de ambas as cadeias;

$$\text{▶ O resultado é } w_1 w_3 = \underbrace{ab}_{w_1} \underbrace{ba}_{w_3} = x_1 x_3 = \underbrace{abb}_{x_1} \underbrace{a}_{x_3}$$

- ▶ Logo, 1, 3 é uma solução para o MPCP correspondente.

Redução de L_u para MPCP

$\langle M_1, w_1 \rangle \in L_u \Leftrightarrow P_1$ é uma instância MPCP com solução.



Redução de L_u para MPCP

A obtenção de P a partir de $\langle M, w \rangle$ pode ser feita da seguinte forma:

- ▶ As listas A e B representam a história de computação de M com w ;
- ▶ Soluções parciais para P representam histórias de computação incompletas para w em M ;
- ▶ Se $w \in L(M)$, ou seja, se $\langle M, w \rangle \in L_u$, então é possível gerar uma solução para P ;
- ▶ Se $w \notin L(M)$, ou seja, se $\langle M, w \rangle \notin L_u$, então não há solução possível para P ;
- ▶ A construção da lista A está sempre uma configuração “atrasada” em relação à construção da lista B ;
- ▶ As listas coincidem se e apenas se M entra num estado final.

Redução de L_u para MPCP

Premissa

Seja $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ e suponha que:

- 1 M não grava brancos na fita;
- 2 M não se desloca para à esquerda da posição inicial da fita.

Nesse caso, é possível afirmar que:

- ▶ As configurações de M tem o formato geral $\alpha q \beta$, com $q \in Q$, $\alpha \in \Gamma^*$ e $\beta \in \Gamma^*$, ou seja, α e β são compostos apenas por símbolos diferentes de B ;
- ▶ As cadeias α e β representam as posições da fita inicialmente ocupadas pela cadeia de entrada w , além de eventuais posições visitadas à direita da mesma.

Redução de L_u para MPCP

Passo 1:

- ▶ O primeiro par da instância MPCP é:

	Lista A	Lista B
1	#	# q_0w #

- ▶ Ele será usado para iniciar a solução, caso exista;
- ▶ Notar que a lista B está uma configuração adiantada em relação à lista A .

Redução de L_u para MPCP

Passo 2:

- ▶ Novos pares são criados a partir de δ , com o objetivo de reproduzir a história de computação de w em M ;
- ▶ $\forall q_i \in Q - F, q_j \in Q, x, y, z \in \Gamma$, acrescentar os pares:

Lista A	Lista B	
$q_i x$	$y q_j$	se $\delta(q_i, x) = (q_j, y, R)$
$z q_i x$	$q_j z y$	se $\delta(q_i, x) = (q_j, y, L)$
$q_i \#$	$y q_j \#$	se $\delta(q_i, B) = (q_j, y, R)$
$z q_i \#$	$q_j z y \#$	se $\delta(q_i, B) = (q_j, y, L)$

- ▶ Para cada transição possível de ser aplicada numa certa configuração de M , há um par correspondente em P ;
- ▶ A lista B está uma configuração adiantada em relação à lista A .

Redução de L_u para MPCP

Passo 3:

- ▶ $\forall x \in \Gamma$, acrescentar os pares:

Lista A	Lista B
x	x
#	#

- ▶ Permitem a cópia de símbolos que não envolvam o estado corrente;
- ▶ Serão usados para permitir o avanço da solução até chegar numa nova configuração.

Redução de L_u para MPCP

Passo 4:

- ▶ Se um estado final foi alcançado, deve-se permitir que as cadeias se tornem idênticas;
- ▶ $\forall q_f \in F, x \in \Gamma, y \in \Gamma$, acrescentar os pares:

Lista A	Lista B
xq_fy	q_f
xq_f	q_f
q_fy	q_f

- ▶ São geradas novas cadeias que não representam configurações;
- ▶ O uso recorrente desses pares permite o “consumo” dos símbolos que se encontram à esquerda e à direita do estado q_f na última configuração.

Redução de L_u para MPCP

Passo 5:

- ▶ Todos os símbolos, a menos de q_f , foram removidos da última configuração;

- ▶ $w_1 \dots w_k = \# \mu \#$

- ▶ $x_1 \dots x_k = \# \mu \# q_f \#$

- ▶ Para torná-las iguais, basta acrescentar o par:

Lista A	Lista B
$q_f \# \#$	#

- ▶ $w_1 \dots w_k = \# \mu \# q_f \# \#$

- ▶ $x_1 \dots x_k = \# \mu \# q_f \# \#$

- ▶ P tem uma solução.

Exemplo

Construção de P a partir de

$M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, \delta, q_1, B, \{q_3\})$ e $w = 01$, com δ :

q_i	$\delta(q_i, 0)$	$\delta(q_i, 1)$	$\delta(q_i, B)$
q_1	$(q_2, 1, R)$	$(q_2, 0, L)$	$(q_2, 1, L)$
q_2	$(q_3, 0, L)$	$(q_1, 0, R)$	$(q_2, 0, R)$
q_3	—	—	—

A história de computação de w em M é:

$$q_1 0 1 \vdash 1 q_2 1 \vdash 1 0 q_1 \vdash 1 q_2 0 1 \vdash q_3 1 0 1$$

Exemplo

Continuação

Passo	Lista A	Lista B	Origem
(1)	#	# q_1 01	
(2)	q_1 0	$1q_2$	$\delta(q_1, 0) = (q_2, 1, R)$
	$0q_1$ 1	q_2 00	$\delta(q_1, 1) = (q_2, 0, L)$
	$1q_1$ 1	q_2 10	$\delta(q_1, 1) = (q_2, 0, L)$
	$0q_1$ #	q_2 01#	$\delta(q_1, B) = (q_2, 1, L)$
	$1q_1$ #	q_2 11#	$\delta(q_1, B) = (q_2, 1, L)$
	$0q_2$ 0	q_3 00	$\delta(q_2, 0) = (q_3, 0, L)$
	$1q_2$ 0	q_3 10	$\delta(q_2, 0) = (q_3, 0, L)$
	q_2 1	$0q_1$	$\delta(q_2, 1) = (q_1, 0, R)$
	q_2 #	$0q_2$ #	$\delta(q_2, B) = (q_2, 0, R)$
(3)	0	0	
	1	1	
	#	#	

Exemplo

Continuação

Passo	Lista A	Lista B	Origem
(4)	$0q_30$	q_3	
	$0q_31$	q_3	
	$1q_30$	q_3	
	$1q_31$	q_3	
	$0q_3$	q_3	
	$1q_3$	q_3	
	q_30	q_3	
	q_31	q_3	
(5)	$q_3\#\#$	$\#$	

Exemplo

Continuação

- ▶ A solução para essa instância MPCP começa com o primeiro par (passo 1):

$$A : \#$$
$$B : \#q_101\#$$

Exemplo

Continuação

- ▶ Para continuar, é necessário que o próximo par da lista A seja prefixo da cadeia $q_101\#$;
- ▶ O par $(q_10, 1q_2)$ é selecionado (passo 2):

A : $\#q_10$

B : $\#q_101\#1q_2$

Exemplo

Continuação

- ▶ Para continuar, é necessário copiar o restante da configuração até alcançar o estado q_2 ;
- ▶ Os pares $(1, 1)$, $(\#, \#)$ e $(1, 1)$ são selecionados (passo 3):

$$A : \#q_101$$

$$B : \#q_101\#1q_21$$

$$A : \#q_101\#$$

$$B : \#q_101\#1q_21\#$$

$$A : \#q_101\#1$$

$$B : \#q_101\#1q_21\#1$$

Exemplo

Continuação

- ▶ Para continuar, é necessário que o próximo par da lista A seja prefixo da cadeia $q_21\#1$;
- ▶ O par $(q_21, 0q_1)$ é selecionado (passo 2):

$$A : \#q_101\#1q_21$$
$$B : \#q_101\#1q_21\#10q_1$$

Exemplo

Continuação

- ▶ Em seguida, pode-se copiar 2 (#1) ou 3 (#10) símbolos antes de aplicar uma nova transição;
- ▶ No entanto, a inserção de 3 símbolos impede o desenvolvimento das cadeias, pois não existem pares na lista A que sejam prefixo de $q_1\#10$:

$$A : \#q_101\#1q_21\#10$$

$$B : \#q_101\#1q_21\#10q_1\#10$$

Exemplo

Continuação

- ▶ Isso acontece porque a próxima movimentação de M é para a esquerda e, portanto, o símbolo à esquerda de q_1 é necessário para fazer a escolha do par correto nesse caso;
- ▶ Deve-se copiar apenas 2 símbolos ($\#$ e 1), resultando em:

$$A : \#q_101\#1q_21\#1$$
$$B : \#q_101\#1q_21\#10q_1\#1$$

Exemplo

Continuação

- ▶ Para continuar, é necessário que o próximo par da lista A seja prefixo da cadeia $0q_1\#1$;
- ▶ O par $(0q_1\#, q_201\#)$ é selecionado (passo 2):

$$A : \#q_101\#1q_21\#10q_1\#$$
$$B : \#q_101\#1q_21\#10q_1\#1q_201\#$$

Exemplo

Continuação

- ▶ Para continuar, pode-se seleccionar o par $(1, 1)$ (passo 3) ou então seleccionar o par $(1q_20, q_310)$ (passo 2);
- ▶ Como a primeira escolha impede o desenvolvimento futuro das cadeias, deve-se optar pela segunda alternativa e o resultado é:

$$A : \#q_101\#1q_21\#10q_1\#1q_20$$

$$B : \#q_101\#1q_21\#10q_1\#1q_201\#q_310$$

Exemplo

Continuação

- ▶ Esse ponto corresponde à entrada de M num estado de aceitação (q_3);
- ▶ Portanto, são iniciados os procedimentos para tornar as cadeias idênticas;
- ▶ Antes, porém, são selecionados os pares $(1, 1)$ e $(\#, \#)$:

$$A : \#q_101\#1q_21\#10q_1\#1q_201$$

$$B : \#q_101\#1q_21\#10q_1\#1q_201\#q_3101$$

$$A : \#q_101\#1q_21\#10q_1\#1q_201\#$$

$$B : \#q_101\#1q_21\#10q_1\#1q_201\#q_3101\#$$

Exemplo

Continuação

- ▶ Para continuar, é selecionado o par (q_31, q_3) (passo 4):

$$A : \#q_101\#1q_21\#10q_1\#1q_201\#q_31$$

$$B : \#q_101\#1q_21\#10q_1\#1q_201\#q_3101\#q_3$$

- ▶ Copiando os símbolos 0, 1 e # (passo 3):

$$A : \#q_101\#1q_21\#10q_1\#1q_201\#q_3101\#$$

$$B : \#q_101\#1q_21\#10q_1\#1q_201\#q_3101\#q_301\#$$

Exemplo

Continuação

- ▶ Para continuar, é selecionado o par (q_30, q_3) (passo 4):

$$A : \#q_101\#1q_21\#10q_1\#1q_201\#q_3101\#q_30$$

$$B : \#q_101\#1q_21\#10q_1\#1q_201\#q_3101\#q_301\#q_3$$

- ▶ Copiando os símbolos 1 e # (passo 3):

$$A : \#q_101\#1q_21\#10q_1\#1q_201\#q_3101\#q_301\#$$

$$B : \#q_101\#1q_21\#10q_1\#1q_201\#q_3101\#q_301\#q_31\#$$

Exemplo

Continuação

- ▶ Para continuar, é selecionado novamente o par (q_31, q_3) (passo 4):

$$A : \#q_101\#1q_21\#10q_1\#1q_201\#q_3101\#q_301\#q_31$$

$$B : \#q_101\#1q_21\#10q_1\#1q_201\#q_3101\#q_301\#q_31\#q_3$$

- ▶ Copiando o símbolo $\#$ (passo 3):

$$A : \#q_101\#1q_21\#10q_1\#1q_201\#q_3101\#q_301\#q_31\#$$

$$B : \#q_101\#1q_21\#10q_1\#1q_201\#q_3101\#q_301\#q_31\#q_3\#$$

Exemplo

Continuação

- ▶ Para terminar, é selecionado o par $(q_3\#\#, \#)$ (passo 5):

A : $\#q_101\#1q_21\#10q_1\#1q_201\#q_3101\#q_301\#q_31\#q_3\#\#$

B : $\#q_101\#1q_21\#10q_1\#1q_201\#q_3101\#q_301\#q_31\#q_3\#\#$

- ▶ As cadeias são idênticas e P tem solução.

Redução de L_u para MPCP

Para provar que a construção proposta é uma redução, é necessário (considerar P obtido a partir de M, w conforme visto anteriormente):

- 1 Provar que se $\langle M, w \rangle \in L_u$, então P é uma instância MPCP com solução;
- 2 Provar que se P é uma instância MPCP com solução, então $\langle M, w \rangle \in L_u$.

Redução de L_u para MPCP

Se $\langle M, w \rangle \in L_u$, então P é uma instância MPCP com solução:

- ▶ Iniciar a simulação com o par 1;
- ▶ Usar os pares do passo 2 para representar mudanças movimentações de M e pares do passo 3 para copiar símbolos da fita e $\#$ conforme necessário;
- ▶ Se M entrar num estado de aceitação, usar os pares do passo 4 e depois o par do passo 5 para permitir que as cadeias fiquem idênticas;
- ▶ Logo, se $\langle M, w \rangle \in L_u$, então P tem solução.

Redução de L_u para MPCP

Se P é uma instância MPCP com solução, então $\langle M, w \rangle \in L_u$:

- ▶ Por se tratar de MPCP, a solução parcial começa com:

$$A : \#$$
$$B : \#q_0w\#$$

Redução de L_u para MPCP

- ▶ Enquanto M não entra em um estado de aceitação, apenas os pares dos passos 2 e 3 pode ser usados, e as cadeias possuem o formato geral (observar que $|xy| > |x|$):

$$A : x$$

$$B : xy$$

- ▶ Se existir uma solução, então isso significa que, em algum momento, os pares do passo 4 terão sido usados;
- ▶ Logo, se P tem solução, então M entra em um estado de aceitação, ou seja, M aceita w e $\langle M, w \rangle \in L_u$.

Problema AMB_{GLC}

Determinar se uma gramática livre de contexto G qualquer é ambígua:

$$AMB_{GLC} = \{\langle G \rangle \mid G \text{ é uma GLC ambígua}\}$$

Teorema: AMB_{GLC} é indecidível.

Prova:

- ▶ Por redução a partir de PCP.

Problema AMB_{GLC}

Construção de uma GLC G a partir de uma instância PCP P , tal que P tem solução $\Leftrightarrow G$ é ambígua:

- ▶ Seja $P = (A, B)$ sobre Σ ;
- ▶ $A = w_1, w_2, \dots, w_k$;
- ▶ $B = x_1, x_2, \dots, x_k$;
- ▶ Seja G_A uma GLC que gera uma linguagem L_A sobre $\Sigma' = \Sigma \cup \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$:

$$A \rightarrow w_1 A a_1 | w_2 A a_2 | \dots | w_k A a_k |$$

$$A \rightarrow w_1 a_1 | w_2 a_2 | \dots | w_k a_k$$

- ▶ a_i representa o índice i usado para selecionar o par correspondente.

Problema AMB_{GLC}

A linguagem L_A :

- ▶ Suas sentenças tem a forma geral:

$$w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_m} a_{i_m} \dots a_{i_2} a_{i_1}$$

com $m \geq 1$ e $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_m \leq k$.

- ▶ L_A é não-ambígua (todas as suas sentenças possuem uma única seqüência de derivações mais à esquerda).

Problema AMB_{GLC}

Seja G_B uma GLC que gera uma linguagem L_B sobre $\Sigma' = \Sigma \cup \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$:

- ▶ $A = w_1, w_2, \dots, w_k$;
- ▶ $B = x_1, x_2, \dots, x_k$;
- ▶ G_B :

$$B \rightarrow x_1 B a_1 | x_2 B a_2 | \dots | x_k B a_k |$$

$$B \rightarrow x_1 a_1 | x_2 a_2 | \dots | x_k a_k$$

- ▶ a_i representa o índice i usado para selecionar o par correspondente;
- ▶ L_B é não-ambígua.

Problema AMB_{GLC}

Construção de uma GLC G_{AB} a partir de G_A e G_B , que por sua vez foram construídas a partir de P :

- ▶ Seja $G_A = (\{A\} \cup \Sigma', \Sigma', P_A, A)$;
- ▶ Seja $G_B = (\{B\} \cup \Sigma', \Sigma', P_B, B)$;
- ▶ Construir $G_{AB} =$

$$(\{S, A, B\} \cup \Sigma', \Sigma', P_A \cup P_B \cup \{S \rightarrow A, S \rightarrow B\}, S)$$

- ▶ $L(G_{AB}) = L_A \cup L_B$.

Problema AMB_{GLC}

Para provar que a construção proposta é uma redução, basta provar que:

- 1 Se a instância PCP P tem solução, então G é ambígua;
- 2 Se G é ambígua, então a instância PCP P tem solução.

Problema AMB_{GLC}

Se G é ambígua, então P tem solução:

1. Considere $G = G_{AB}$;
2. Se G é ambígua, então existe pelo menos uma cadeia α com duas ou mais derivações mais à esquerda em $L(G)$;
3. Como, por construção, G_A e G_B são não-ambíguas, então as duas derivações para α devem ser:

$$S \Rightarrow A \Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha$$

$$S \Rightarrow B \Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha$$

4. No entanto, $\alpha = w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_m} a_{i_m} \dots a_{i_2} a_{i_1} = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m} a_{i_m} \dots a_{i_2} a_{i_1}$
5. Portanto, $w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_m} = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}$
6. Logo, P tem uma solução i_1, i_2, \dots, i_m .

Problema AMB_{GLC}

Se P tem solução, então G é ambígua:

1. Considere $G = G_{AB}$;
2. Suponha que i_1, i_2, \dots, i_m seja uma solução para P ;
3. Considere as seguintes derivações em G :

$$\begin{aligned}
 S &\Rightarrow A \Rightarrow w_{i_1} A a_{i_1} \Rightarrow w_{i_1} w_{i_2} A a_{i_2} a_{i_1} \Rightarrow \dots \\
 &\Rightarrow w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_{m-1}} A a_{i_{m-1}} \dots a_{i_2} a_{i_1} \\
 &\Rightarrow w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_{m-1}} w_{i_m} a_{i_m} a_{i_{m-1}} \dots a_{i_2} a_{i_1} \\
 S &\Rightarrow B \Rightarrow x_{i_1} A a_{i_1} \Rightarrow x_{i_1} x_{i_2} A a_{i_2} a_{i_1} \Rightarrow \dots \\
 &\Rightarrow x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{m-1}} A a_{i_{m-1}} \dots a_{i_2} a_{i_1} \\
 &\Rightarrow x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{m-1}} x_{i_m} a_{i_m} a_{i_{m-1}} \dots a_{i_2} a_{i_1}
 \end{aligned}$$

Problema AMB_{GLC}

4. Como i_1, i_2, \dots, i_m é uma solução, então $w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_m} = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}$
5. Como as cadeias são idênticas, e como elas foram geradas de formas distintas, usando apenas derivações mais à esquerda, então G é ambígua.

Como PCP reduz para G_{AMB} e PCP é indecidível, então G_{AMB} é também indecidível.

Exemplo

- ▶ Seja P a seguinte instância PCP sobre $\{a, b\}$:

	Lista A	Lista B
	w_i	x_i
1	aaa	aa
2	baa	$abaaa$

- ▶ Considerar $\Sigma' = \{a, b, a_1, a_2\}$ e G_A :

$$A \rightarrow aaaAa_1 | baaAa_2 | aaaa_1 | baaa_2$$

- ▶ Considerar $\Sigma' = \{a, b, a_1, a_2\}$ e G_B :

$$B \rightarrow aaBa_1 | abaaaBa_2 | aaa_1 | abaaaa_2$$

Exemplo

- Considerar $\Sigma' = \{a, b, a_1, a_2\}$ e G_{AB} :

$$S \rightarrow A|B$$

$$A \rightarrow aaaAa_1|baaAa_2|aaaa_1|baaa_2$$

$$B \rightarrow aaBa_1|abaaaBa_2|aaa_1|abaaaa_2$$

Exemplo

Continuação

P tem solução $\Rightarrow G_{AB}$ é ambígua:

- ▶ A seqüência 121 é uma solução para P ;
- ▶ Considerar $w_1w_2w_1a_1a_2a_1 \in L_A$ e $x_1x_2x_1a_1a_2a_1 \in L_B$;
- ▶ Como 121 é solução, então $w_1w_2w_1 = x_1x_2x_1$ e, portanto,
 $w_1w_2w_1a_1a_2a_1 = x_1x_2x_1a_1a_2a_1 = aaabaaaaa_1a_2a_1$;
- ▶ No entanto, existem duas derivações mais à esquerda distintas para essa cadeia em G_{AB} :

$$S \Rightarrow A \Rightarrow aaaAa_1 \Rightarrow aaabaaAa_2a_1 \Rightarrow aaabaaaaa_1a_2a_1$$

$$S \Rightarrow B \Rightarrow aaAa_1 \Rightarrow aaabaaaAa_2a_1 \Rightarrow aaabaaaaa_1a_2a_1$$

- ▶ Portanto, G_{AB} é ambígua.

Exemplo

Continuação

G_{AB} é ambígua $\Rightarrow P$ tem solução:

- ▶ Seja cadeia $aaabaaaaa_1a_2a_1 \in L_{AB}$;
- ▶ Essa cadeia tem duas derivações mais à esquerda distintas:

$$S \Rightarrow A \Rightarrow aaaAa_1 \Rightarrow aaabaaAa_2a_1 \Rightarrow aaabaaaaa_1a_2a_1$$

$$S \Rightarrow B \Rightarrow aaAa_1 \Rightarrow aaabaaaAa_2a_1 \Rightarrow aaabaaaaa_1a_2a_1$$

- ▶ Da primeira derivação, pode-se concluir que $aaabaaaaa = w_1w_2w_1$;
- ▶ Da segunda derivação, pode-se concluir que $aaabaaaaa = x_1x_2x_1$;
- ▶ Portanto, P tem uma solução (121).

Complemento de uma linguagem de lista

- ▶ L_A e L_B são linguagens livres de contexto;
- ▶ Deseja-se provar que $\overline{L_A}$ e $\overline{L_B}$ são também livres de contexto;
- ▶ Esses resultados permitirão a demonstração de que outros problemas acerca das linguagens livres de contexto são também indecidíveis.

$\overline{L_A}$ é LLC

Teorema: Seja L_A uma linguagem para a lista A de uma instância PCP P sobre $\Sigma \cup \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Então $\overline{L_A}$ é também livre de contexto.

Prova:

Será apresentado um autômato de pilha determinístico M , com critério de aceitação estado final, que reconhece $\overline{L_A}$.

$\overline{L_A}$ é LLC

1. Enquanto M encontrar apenas símbolos de Σ na entrada, ele os insere na pilha. Se a cadeia de entrada esgotar, M aceita pois todas as cadeias de $\Sigma^* \in \overline{L_A}$;
2. Verificar se o próximo símbolo da cadeia de entrada é a_i ; se não é, aceitar;
3. Desempilhar $|w_i|$ símbolos do topo da pilha; se não houverem $|w_i|$ símbolos na pilha, aceitar; se houverem, verificar se eles correspondem à w_i^R :
 - (a) Em caso negativo, então a cadeia de entrada certamente não pertence à L_A . Nesse caso, M deve esgotar a leitura dos símbolos da cadeia de entrada e ir para um estado de aceitação;
 - (b) Em caso afirmativo, e se a pilha ainda não está vazia, ir para 2;
 - (c) Em caso afirmativo, e se a pilha está vazia, a cadeia analisada até o momento pertence à L_A . A aceitação ou rejeição de M estará condicionada à presença de novos símbolos no final da cadeia.
4. Se houverem outros símbolos de Σ na cadeia entrada, aceitar. Caso contrário, rejeitar.

Exemplo

Seja $\Sigma = \{0, 1\}$ e suponha que as listas A e B sejam as seguintes:

	Lista A	Lista B
i	w_i	x_i
1	1	111
2	10111	10
3	10	0

$$A \rightarrow 1Aa_1|10111Aa_2|10Aa_3|1a_1|10111a_2|10a_3$$

Exemplo

► A cadeia $\underbrace{10111}_{w_2} \underbrace{10}_{w_3} a_3 a_2 \notin \overline{L_A}$, pois M :

- 1 Empilha 1011110;
- 2 Quando encontra a_3 , desempilha $|w_3| = 2$ símbolos, $\sigma_1 \sigma_2$;
- 3 Verifica que $\sigma_1 \sigma_2 = 01 = w_3^R$;
- 4 Quando encontra a_2 , desempilha $|w_2| = 5$ símbolos, $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5$;
- 5 Verifica que $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 = 11101 = w_2^R$;
- 6 Como não há outros símbolos na cadeia de entrada, a cadeia pertence à L_A e portanto M a rejeita.

Exemplo

▶ A cadeia $\underbrace{10111}_{w_2} \underbrace{10}_{w_3} a_2 a_3 \in \overline{L_A}$, pois:

- ① Empilha 1011110;
- ② Quando encontra a_2 , desempilha $|w_2| = 5$ símbolos, $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5$;
- ③ Verifica que $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 = 01111 \neq w_2^R$ e aceita a entrada.

▶ A cadeia $a_3 a_2 \underbrace{10111}_{w_2} \underbrace{10}_{w_3} \in \overline{L_A}$, pois:

- ① Não existem símbolos na pilha para verificar depois de encontrado a_3 .

Exemplo

▶ A cadeia $\underbrace{10111}_{w_2} \underbrace{10}_{w_3} a_3 a_2 a_1 \in \overline{L_A}$:

- ① Empilha 1011110;
- ② Quando encontra a_3 , desempilha $|w_3| = 2$ símbolos, $\sigma_1 \sigma_2$;
- ③ Verifica que $\sigma_1 \sigma_2 = 01 = w_3^R$;
- ④ Quando encontra a_2 , desempilha $|w_2| = 5$ símbolos, $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5$;
- ⑤ Verifica que $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 = 11101 = w_2^R$;
- ⑥ Quando encontra a_1 , M aceita a entrada.

▶ A cadeia $\underbrace{10111}_{w_2} \underbrace{10}_{w_3} \in \overline{L_A}$:

- ① Empilha 1011110;
- ② Como não encontra nenhum a_i , a entrada é aceita.

Exemplo

▶ A cadeia $\underbrace{11111}_? a_2 \in \overline{L_A}$:

- ① Empilha 11111;
- ② Quando encontra a_2 , desempilha $|w_2| = 5$ símbolos, $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5$;
- ③ Verifica que $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5 = 11111 \neq w_2^R$ e aceita a entrada.

▶ A cadeia $\underbrace{1111}_? \underbrace{1}_{w_1} a_1 a_2 \in \overline{L_A}$:

- ① Empilha 11111;
- ② Quando encontra a_1 , desempilha $|w_1| = 1$ símbolos, σ_1 ;
- ③ Verifica que $\sigma_1 = 1 = w_1^R$;
- ④ Quando encontra a_2 , tenta desempilhar $|w_2| = 5$ símbolos, mas existem apenas 4 deles na pilha;
- ⑤ M aceita a entrada.

Problemas

Sejam G_1, G_2 gramáticas livres de contexto quaisquer e R uma expressão regular qualquer. Os seguintes problemas são indecidíveis:

- 1 $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?
- 2 $L(G_1) = L(G_2)$?
- 3 $L(G_1) = L(R)$?
- 4 $L(G_1) = T^*$ para algum alfabeto T ?
- 5 $L(G_1) \subseteq L(G_2)$?
- 6 $L(R) \subseteq L(G_1)$?

Problemas

Serão feitas reduções de PCP para cada um desses problemas:

- ▶ Seja Σ o alfabeto da instância PCP P considerada;
- ▶ Seja $I = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$;
- ▶ $L_A, L_B, \overline{L_A}$ e $\overline{L_B}$ são linguagens livres de contexto construídas sobre P ;

$$L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset?$$

$$INT_{GLC} = \{\langle G_1, G_2 \rangle \mid G_1 \text{ e } G_2 \text{ são GLCs e } L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset\}$$

- ▶ Seja $L(G_1) = L_A$;
- ▶ Seja $L(G_2) = L_B$;
- ▶ Se existe $w \in L(G_1) \cap L(G_2)$, então existe solução para P ;
- ▶ O conjunto $L(G_1) \cap L(G_2)$ contém todas as cadeias que representam soluções de P ;
- ▶ Logo, se P tem solução $\Rightarrow L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$;
- ▶ Além disso, se P não tem solução $\Rightarrow L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$;
- ▶ Temos uma redução de P para $\overline{INT_{GLC}}$;
- ▶ Portanto, $\overline{INT_{GLC}}$ e também INT_{GLC} são indecidíveis.

$$L(G_1) = L(G_2)?$$

$$EQ_{GLC} = \{\langle G_1, G_2 \rangle \mid G_1 \text{ e } G_2 \text{ são GLCs e } L(G_1) = L(G_2)\}$$

- ▶ Seja G_1 tal que $L(G_1) = \overline{L_A} \cup \overline{L_B}$ (LLCs são fechadas em relação à união);
- ▶ Seja G_2 tal que $L(G_2) = (\Sigma \cup I)^*$ (a linguagem é regular);
- ▶ Notar que $L(G_1) = \overline{L_A} \cup \overline{L_B} = \overline{L_A \cap L_B}$;
- ▶ Portanto, $L(G_1)$ contém todas as cadeias que não são solução de P ;
- ▶ $L(G_2)$ contém todas as cadeias sobre o alfabeto $\Sigma \cup I$;
- ▶ Logo, P tem solução $\Leftrightarrow L(G_1) \neq L(G_2)$;
- ▶ Temos uma redução de P para $\overline{EQ_{GLC}}$;
- ▶ Portanto, $\overline{EQ_{GLC}}$ e também EQ_{GLC} são indecidíveis.

$$L(G_1) = L(R)?$$

$$EQ_{GLC/R} = \{ \langle G_1, R \rangle \mid G_1 \text{ é uma GLC,} \\ R \text{ é uma expressão regular e } L(G_1) = L(R) \}$$

- ▶ Idêntico ao caso anterior;
- ▶ Basta substituir G_2 por R .

$$L(G_1) = T^*?$$

$$TOT_{GLC} = \{\langle G_1 \rangle \mid G_1 \text{ é uma GLC e } L(G_1) = T^* \text{ para algum alfabeto } T\}$$

- ▶ Seja G_1 tal que $L(G_1) = \overline{L_A} \cup \overline{L_B}$ (LLCs são fechadas em relação à união);
- ▶ Notar que $L(G_1) = \overline{L_A} \cup \overline{L_B} = \overline{L_A \cap L_B}$;
- ▶ Portanto, $L(G_1)$ contém todas as cadeias que não são solução de P ;
- ▶ Logo, P tem solução $\Leftrightarrow L(G_1) \neq T^*$;
- ▶ Temos uma redução de P para $\overline{TOT_{GLC}}$;
- ▶ Notar que $T = \Sigma \cup \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ é o único alfabeto sobre o qual $\overline{L_A} \cup \overline{L_B}$ pode corresponder a um fechamento;
- ▶ Portanto, $\overline{TOT_{GLC}}$ e também TOT_{GLC} são indecíveis.

$L(G_1) \subseteq L(G_2)?$

$$SUB_{GLC} = \{\langle G_1, G_2 \rangle \mid G_1 \text{ e } G_2 \text{ são GLCs e } L(G_1) \subseteq L(G_2)\}$$

- ▶ Seja G_1 tal que $L(G_1) = (\Sigma \cup I)^*$; $L(G_1)$ contém todas as cadeias;
- ▶ Seja G_2 tal que $L(G_2) = \overline{L_A} \cup \overline{L_B}$; $L(G_2)$ contém apenas as cadeias que não são solução de P ;
- ▶ Se $L(G_1) \subseteq L(G_2) \Rightarrow L(G_1) = L(G_2)$;
- ▶ Se $L(G_1) \not\subseteq L(G_2) \Rightarrow L(G_1) \neq L(G_2)$;

$L(G_1) \subseteq L(G_2)?$

$$SUB_{GLC} = \{\langle G_1, G_2 \rangle \mid G_1 \text{ e } G_2 \text{ são GLCs e } L(G_1) \subseteq L(G_2)\}$$

- ▶ Logo, P tem solução $\Rightarrow L(G_1)$ contém pelo menos uma cadeia que não pertence à $L(G_2) \Rightarrow L(G_1) \neq L(G_2) \Rightarrow L(G_1) \not\subseteq L(G_2)$;
- ▶ Além disso, P não tem solução $\Rightarrow L(G_2)$ contém todas as cadeias $\Rightarrow L(G_1) = L(G_2) \Rightarrow L(G_1) \subseteq L(G_2)$;
- ▶ Temos uma redução de P para $\overline{SUB_{GLC}}$;
- ▶ Portanto, $\overline{SUB_{GLC}}$ e também SUB_{GLC} são indecidíveis.

$L(R) \subseteq L(G_1)?$

$$SUB_{R/GLC} = \{ \langle R, G_1 \rangle \mid R \text{ é uma expressão regular,} \\ G_1 \text{ é uma GLC e } L(R) \subseteq L(G_1) \}$$

- ▶ Idêntico ao caso anterior;
- ▶ Substituir G_1 por R ;
- ▶ Substituir G_2 por G_1 .