

Gramáticas Lineares à Direita e à Esquerda

Prof. Marcus Vinícius Midená Ramos

Universidade Federal do Vale do São Francisco

2 de fevereiro de 2020

`marcus.ramos@univasf.edu.br`
`www.univasf.edu.br/~marcus.ramos`

Dada uma G.L.D,
obter uma **G.L.D** que
gera a linguagem reversa.

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Algoritmo

Entrada:

G.L.D. $G_1 = (V, \Sigma, P_1, S)$

- ▶ $\alpha \rightarrow \beta \in P_1$
- ▶ $\alpha \in N$
- ▶ $\beta \in (\Sigma \cup \{\epsilon\})(N \cup \{\epsilon\})$

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Algoritmo

Saída:

G.L.D. $G_2 = (V \cup \{W\}, \Sigma, P_2, W)$

P_1	P_2
$X \rightarrow aY$	$Y \rightarrow aX$
$X \rightarrow Y$	$Y \rightarrow X$
$X \rightarrow a$	$W \rightarrow aX$
$X \rightarrow \epsilon$	$W \rightarrow X$
	$S \rightarrow \epsilon$

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Teorema

$$L(G_1) = L(G_2)^R$$

ou ainda

$$\forall G_1(G.L.D.), \exists G_2(G.L.D.), L(G_1) = L(G_2)^R$$

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Exemplo

G.L.D. G_1 :

- ▶ $S \rightarrow aS$
- ▶ $S \rightarrow X$
- ▶ $X \rightarrow bX$
- ▶ $X \rightarrow Y$
- ▶ $Y \rightarrow cY$
- ▶ $Y \rightarrow \epsilon$

$$L(G_1) = a^*b^*c^*$$

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Exemplo (continuação)

G.L.D. G_2 :

- ▶ $S \rightarrow aS$
- ▶ $X \rightarrow S$
- ▶ $X \rightarrow bX$
- ▶ $Y \rightarrow X$
- ▶ $Y \rightarrow cY$
- ▶ $W \rightarrow Y$
- ▶ $S \rightarrow \epsilon$

$$L(G_2) = c^*b^*a^* = L(G_1)^R$$

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Exemplo (derivação)

Derivação da sentença $aabbcc$ em G_1 :

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow aS \Rightarrow aaS \Rightarrow aaX \Rightarrow aabX \Rightarrow aabbX \Rightarrow \\ &aabbY \Rightarrow aabbcY \Rightarrow aabbccY \Rightarrow aabbcc \end{aligned}$$

Derivação da sentença $ccbbaa$ ($=aabbcc^R$) em G_2 :

$$\begin{aligned} W &\Rightarrow Y \Rightarrow cY \Rightarrow ccY \Rightarrow ccX \Rightarrow ccbX \Rightarrow \\ cbbX &\Rightarrow cbbS \Rightarrow cbbaS \Rightarrow cbbaaS \Rightarrow cbbbaa \end{aligned}$$

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Teorema

Deseja-se provar `rl_to_rl_reverse_derives_2`:

$$\forall w : \textit{sentence}, (S \Rightarrow_{G_1}^* w) \Leftrightarrow (W \Rightarrow_{G_2}^* w^R)$$

ou ainda

$$\forall w : \textit{sentence}, (S \Rightarrow_{G_1}^n w) \Leftrightarrow (W \Rightarrow_{G_2}^{n+1} w^R)$$

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Observação

- ▶ Dados:
 - ▶ Uma GLD G_1 ;
 - ▶ Uma GLD G_2 construída de acordo com o algoritmo apresentado;
 - ▶ Uma sentença w , $w \in L(G_1)$.
- ▶ Existe uma relação entre as formas sentenciais da derivação de uma sentença w em G_1 e de w^R em G_2 ;
- ▶ Esta relação é capturada pelos lemas intermediários apresentados a seguir.

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Lema intermediário 1a

Deseja-se provar `rl_to_rl_reverse_derives_1a`:

$$\forall w : \textit{sentence}, S \Rightarrow_{G_1}^* w \rightarrow$$

$$\forall i, \forall N, i \leq |w| \rightarrow$$

$$(S \Rightarrow_{G_1}^* \textit{prefix}(i, w)N) \rightarrow (W \Rightarrow_{G_2}^* \textit{prefix}(|w| - i, w^R)N)$$

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Lema intermediário 1b

Deseja-se provar `rl_to_rl_reverse_derives_1b`:

$$\forall w : \textit{sentence}, W \Rightarrow_{G_2}^* w^R \rightarrow$$

$$\forall i, \forall N, i \leq |w| \rightarrow$$

$$(W \Rightarrow_{G_2}^* \textit{prefix}(|w| - i, w^R)N) \rightarrow (S \Rightarrow_{G_1}^* \textit{prefix}(i, w)N)$$

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Lemas intermediários

- ▶ De fato, todas as formas sentenciais da derivação da sentença $aabbcc$ em G_1 do exemplo, e que são numeradas de 0 a 8, estão em correspondência direta, através do lema intermediário, com formas sentenciais da derivação de w^R em G_2 (slide seguinte)

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Exemplo (derivação)

Derivação da sentença $aabbcc$ em G_1 :

$$\begin{aligned} \underbrace{S}_0 &\Rightarrow \underbrace{aS}_1 \Rightarrow \underbrace{aaS}_2 \Rightarrow \underbrace{aaX}_3 \Rightarrow \underbrace{aabX}_4 \Rightarrow \underbrace{aabbX}_5 \Rightarrow \\ &\underbrace{aabbY}_6 \Rightarrow \underbrace{aabbcY}_7 \Rightarrow \underbrace{aabbccY}_8 \Rightarrow aabbcc \end{aligned}$$

Derivação da sentença $ccbbaa$ em G_2 :

$$\begin{aligned} W &\Rightarrow \underbrace{Y}_8 \Rightarrow \underbrace{cY}_7 \Rightarrow \underbrace{ccY}_6 \Rightarrow \underbrace{ccX}_5 \Rightarrow \underbrace{ccbX}_4 \Rightarrow \\ &\underbrace{ccbX}_3 \Rightarrow \underbrace{ccbS}_2 \Rightarrow \underbrace{ccbbaS}_1 \Rightarrow \underbrace{ccbbaaS}_0 \Rightarrow cbbbaa \end{aligned}$$

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Exemplo (derivação)

#	G_1	G_2
0	$S \Rightarrow^* S$	$W \Rightarrow^* ccbbaaS$
1	$S \Rightarrow^* aS$	$W \Rightarrow^* ccbbaS$
2	$S \Rightarrow^* aaS$	$W \Rightarrow^* ccbbS$
3	$S \Rightarrow^* aaX$	$W \Rightarrow^* ccbbX$
4	$S \Rightarrow^* aabX$	$W \Rightarrow^* ccbX$
5	$S \Rightarrow^* aabbX$	$W \Rightarrow^* ccX$
6	$S \Rightarrow^* aabbY$	$W \Rightarrow^* ccY$
7	$S \Rightarrow^* aabbcY$	$W \Rightarrow^* cY$
8	$S \Rightarrow^* aabbccY$	$W \Rightarrow^* Y$

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Prova informal

- ▶ Prova de que `rl_to_rl_derives_2` é verdadeiro supondo que `rl_to_rl_derives_1a` e `rl_to_rl_derives_1b` são verdadeiros;
- ▶ Duas provas são necessárias:
 - 1 $\forall w : \textit{sentence}, (S \Rightarrow_{G_1}^* w) \rightarrow (W \Rightarrow_{G_2}^* w^R)$
 - 2 $\forall w : \textit{sentence}, (S \Rightarrow_{G_1}^* w) \leftarrow (W \Rightarrow_{G_2}^* w^R)$

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Prova informal

$$\textcircled{1} \quad \forall w : \textit{sentence}, (S \Rightarrow_{G_1}^* w) \rightarrow (W \Rightarrow_{G_2}^* w^R)$$

- ▶ Hipótese 1: $w : \textit{sentence}$;
- ▶ Hipótese 2: $S \Rightarrow_{G_1}^* w$;
- ▶ Sabe-se que $S \Rightarrow_{G_1}^* S$;
- ▶ Em outras palavras $S \Rightarrow_{G_1}^* \textit{prefix}(0, w)S$
- ▶ Portanto $i = 0$;
- ▶ Portanto $N = S$;
- ▶ Aplicação de `rl_to_rl_derives_1a` nas hipóteses acima resulta em $W \Rightarrow_{G_2}^* w^R S$;
- ▶ Sabe-se que $S \rightarrow \epsilon \in P_2$;
- ▶ Logo, $W \Rightarrow_{G_2}^* w^R S \Rightarrow_{G_2} w^R$ e $w^R \in L(G_2)$.

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Prova informal

2 $\forall w : \text{sentence}, (S \Rightarrow_{G_1}^* w) \leftarrow (W \Rightarrow_{G_2}^* w^R)$

- ▶ Para esta prova, vamos supor que todas as regras de G_1 são do tipo $X \rightarrow \sigma Y$ ou $X \rightarrow Y$ com uma única regra vazia $Z \rightarrow \epsilon$;
- ▶ Em outras palavras, vamos supor que G_1 encontra-se na forma normal proposta acima e detalhada a seguir.

Forma normal

Algoritmo

Forma normal para GLD G resultando em G' :

- ▶ Cria-se um novo símbolo não-terminal $E \in N'$;
- ▶ Cria-se uma nova regra $E \rightarrow \epsilon \in P'$;
- ▶ Se $X \rightarrow \sigma Y \in P$, então $X \rightarrow \sigma Y \in P'$;
- ▶ Se $X \rightarrow Y \in P$, então $X \rightarrow Y \in P'$;
- ▶ Se $X \rightarrow \sigma \in P$, então $X \rightarrow \sigma E \in P'$;
- ▶ Se $X \rightarrow \epsilon \in P$, então $X \rightarrow E \in P'$.

Necessário formalizar a construção de G' a partir de G ;

Necessário provar formalmente que $L(G') = L(G)$.

Forma normal

Prova

Deseja-se provar:

$$L(G) = L(G')$$

ou seja

$$\forall w : \textit{sentence}, (S \Rightarrow_G^* w) \leftrightarrow (S \Rightarrow_{G'}^* w)$$

Forma normal

Prova informal 1

- 2 $\forall w : \text{sentence}, (S \Rightarrow_G^* w) \rightarrow (S \Rightarrow_{G'}^* w)$
- ▶ Hipótese: $S \Rightarrow_G^* w$;
 - ▶ Logo, existem duas possibilidades mutuamente exclusivas:
 - ▶ $S \Rightarrow_G^* wX$ e $X \rightarrow \epsilon$, ou
 - ▶ $S \Rightarrow_G^* \alpha X$, $X \rightarrow \sigma$ e $w = \alpha\sigma$.
 - ▶ No primeiro caso, é fato que $S \Rightarrow_{G'}^* wX$ (pois as regras usadas na derivação $S \Rightarrow_G^* wX$ são preservadas em G');
 - ▶ Além disso, como $X \rightarrow \epsilon \in P$, então $X \rightarrow E \in P'$;
 - ▶ Logo, $S \Rightarrow_{G'}^* wX \Rightarrow_{G'} wE \Rightarrow_{G'} w$;
 - ▶ No segundo caso, é fato que $S \Rightarrow_{G'}^* \alpha X$ (idem);
 - ▶ Além disso, como $X \rightarrow \sigma E \in P'$, segue que $S \Rightarrow_{G'}^* \alpha X \Rightarrow_{G'} \alpha\sigma E$;
 - ▶ Como $E \rightarrow \epsilon \in P'$, segue que $S \Rightarrow_{G'}^* \alpha X \Rightarrow_{G'} \alpha\sigma E \Rightarrow \alpha\sigma$, ou seja, $S \Rightarrow_{G'}^* w$.

Forma normal

Prova informal 2

3 $\forall w : \text{sentence}, (S \Rightarrow_{G'}^* w) \rightarrow (S \Rightarrow_G^* w)$

- ▶ Hipótese: $S \Rightarrow_{G'}^* w$;
- ▶ Logo, é fato que $S \Rightarrow_{G'}^* wE$;
- ▶ Só existem duas possibilidades, mutuamente exclusivas:
 - ▶ $S \Rightarrow_{G'}^* wX$ e $X \rightarrow E$, ou
 - ▶ $S \Rightarrow_{G'}^* \alpha Y$, $Y \rightarrow \sigma E$ e $w = \alpha\sigma$.
- ▶ No primeiro caso, temos que $S \Rightarrow_G^* wX$ e $X \rightarrow \epsilon \in$; logo, $S \Rightarrow_G^* w$;
- ▶ No segundo caso, temos que $S \Rightarrow_G^* \alpha Y$ e $Y \rightarrow \sigma$; logo, $S \Rightarrow_G^* \alpha\sigma$, ou seja, $S \Rightarrow_G^* w$.

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Prova informal

$$\textcircled{2} \quad \forall w : \textit{sentence}, (S \Rightarrow_{G_1}^* w) \leftarrow (W \Rightarrow_{G_2}^* w^R)$$

- ▶ Hipótese: $W \Rightarrow_{G_2}^* w^R$;
- ▶ Supondo que G_1 está na forma normal, então existe uma única regra com W do lado esquerdo em G_2 , e esta regra é $W \rightarrow Z$;
- ▶ Logo, $W \Rightarrow_{G_2} Z \Rightarrow_{G_2}^* w^R$ e $W \Rightarrow_{G_2} Z$;
- ▶ Em outras palavras, $W \Rightarrow_{G_2} \textit{prefix}(|w| - |w|, w^R)Z$
- ▶ Considere $i = |w|$;
- ▶ Considere $N = Z$;
- ▶ Aplicação de `rl_to_rl_derives_1b` nas hipóteses acima resulta em $S \Rightarrow_{G_1}^* (w^R)^R Z$;
- ▶ Como é sabido que $Z \rightarrow \epsilon \in P_1$, segue que $S \Rightarrow_{G_1}^* wZ \Rightarrow_{G_1}^* w$ e portanto $w \in L(G_1)$.