Gramáticas Lineares à Direita e à Esquerda

Prof. Marcus Vinícius Midena Ramos

Universidade Federal do Vale do São Francisco

20 de dezembro de 2019

marcus.ramos@univasf.edu.br
www.univasf.edu.br/~marcus.ramos

Parte 2

Dada uma G.L.D,
obter uma G.L.D que
gera a linguagem reversa.

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Algoritmo

Entrada:

G.L.D. $G_1 = (V, \Sigma, P_1, S)$

- $\alpha \rightarrow \beta \in P_1$
- $\alpha \in N$
- $\beta \in (\Sigma \cup \{\epsilon\})(N \cup \{\epsilon\})$

Saída:
G.L.D. $G_2 = (V \cup \{W\}, \Sigma, P_2, W)$

P_1	P_2
$X \rightarrow aY$	$Y \rightarrow aX$
$X \rightarrow Y$	$Y \rightarrow X$
$X \rightarrow a$	$W \rightarrow aX$
$X \rightarrow \epsilon$	$W \rightarrow X$
	$S \rightarrow \epsilon$

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Teorema

$$L(G_1) = L(G_2)^R$$

ou ainda

$$\forall\, G_1(G.L.D.), \exists\, G_2(G.L.D.), L(G_1) = L(G_2)^R$$

G.L.D. G_1:

- $S \rightarrow aS$
- $S \rightarrow X$
- $X \rightarrow bX$
- $X \rightarrow Y$
- $Y \rightarrow cY$
- $Y \rightarrow \epsilon$

$L(G_1) = a^*b^*c^*$

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Exemplo (continuação)

G.L.D. G_2:

- $S \to aS$
- $X \to S$
- $X \to bX$
- $Y \to X$
- $Y \to cY$
- $W \to Y$
- $S \to \epsilon$

$L(G_2) = c^*b^*a^* = L(G_1)^R$

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Exemplo (derivação)

Derivação da sentença $aabbcc$ em G_1:

$$S \Rightarrow aS \Rightarrow aaS \Rightarrow aaX \Rightarrow aabX \Rightarrow aabbX \Rightarrow$$

$$aabbY \Rightarrow aabbcY \Rightarrow aabbccY \Rightarrow aabbcc$$

Derivação da sentença $ccbbaa$ ($=aabbcc^R$) em G_2:

$$W \Rightarrow Y \Rightarrow cY \Rightarrow ccY \Rightarrow ccX \Rightarrow ccbX \Rightarrow$$

$$ccbbX \Rightarrow ccbbS \Rightarrow ccbbaS \Rightarrow ccbbaaS \Rightarrow ccbbaa$$

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Teorema

Deseja-se provar `rl_to_rl_reverse_derives_2`:

$$\forall\, w : sentence, (S \Rightarrow^{*}_{G_1} w) \Leftrightarrow (W \Rightarrow^{*}_{G_2} w^R)$$

ou ainda

$$\forall\, w : sentence, (S \Rightarrow^{n}_{G_1} w) \Leftrightarrow (W \Rightarrow^{n+1}_{G_2} w^R)$$

- Dados:
  - Uma GLD G_1;
  - Uma GLD G_2 construída de acordo com o algoritmo apresentado;
  - Uma sentença w, $w \in L(G_1)$.
- Existe uma relação entre as formas sentenciais da derivação de uma sentença w em G_1 e de w^R em G_2;
- Esta relação é capturada pelos lemas intermediários apresentados a seguir.

Deseja-se provar `rl_to_rl_reverse_derives_1a`:

$$\forall\, w : sentence, S \Rightarrow^*_{G_1} w \rightarrow$$

$$\forall i, \forall N, i \leq |w| \rightarrow$$

$$(S \Rightarrow^*_{G_1} prefix(i,w)N) \rightarrow (W \Rightarrow^*_{G_2} prefix(|w|-i, w^R)N)$$

Deseja-se provar `rl_to_rl_reverse_derives_1b`:

$$\forall\, w : sentence, W \Rightarrow_{G_2}^{*} w^R \rightarrow$$

$$\forall i, \forall N, i \leq |w| \rightarrow$$

$$(W \Rightarrow_{G_2}^{*} prefix(|w| - i, w^R)N) \rightarrow (S \Rightarrow_{G_1}^{*} prefix(i, w)N)$$

- De fato, todas as formas sentenciais da derivação da sentença $aabbcc$ em G_1 do exemplo, e que são numeradas de 0 a 8, estão em correspondência direta, através do lema intermediário, com formas sentenciais da derivação de w^R em G_2 (slide seguinte)

Derivação da sentença $aabbcc$ em G_1:

$$\underbrace{S}_{0} \Rightarrow \underbrace{aS}_{1} \Rightarrow \underbrace{aaS}_{2} \Rightarrow \underbrace{aaX}_{3} \Rightarrow \underbrace{aabX}_{4} \Rightarrow \underbrace{aabbX}_{5} \Rightarrow$$

$$\underbrace{aabbY}_{6} \Rightarrow \underbrace{aabbcY}_{7} \Rightarrow \underbrace{aabbccY}_{8} \Rightarrow aabbcc$$

Derivação da sentença $ccbbaa$ em G_2:

$$W \Rightarrow \underbrace{Y}_{8} \Rightarrow \underbrace{cY}_{7} \Rightarrow \underbrace{ccY}_{6} \Rightarrow \underbrace{ccX}_{5} \Rightarrow \underbrace{ccbX}_{4} \Rightarrow$$

$$\underbrace{ccbbX}_{3} \Rightarrow \underbrace{ccbbS}_{2} \Rightarrow \underbrace{ccbbaS}_{1} \Rightarrow \underbrace{ccbbaaS}_{0} \Rightarrow ccbbaa$$

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Exemplo (derivação)

#	G_1	G_2
0	$S \Rightarrow^* S$	$W \Rightarrow^* ccbbaaS$
1	$S \Rightarrow^* aS$	$W \Rightarrow^* ccbbaS$
2	$S \Rightarrow^* aaS$	$W \Rightarrow^* ccbbS$
3	$S \Rightarrow^* aaX$	$W \Rightarrow^* ccbbX$
4	$S \Rightarrow^* aabX$	$W \Rightarrow^* ccbX$
5	$S \Rightarrow^* aabbX$	$W \Rightarrow^* ccX$
6	$S \Rightarrow^* aabbY$	$W \Rightarrow^* ccY$
7	$S \Rightarrow^* aabbcY$	$W \Rightarrow^* cY$
8	$S \Rightarrow^* aabbccY$	$W \Rightarrow^* Y$

- Prova de que `rl_to_rl_derives_2` é verdadeiro supondo que `rl_to_rl_derives_1a` e `rl_to_rl_derives_1b` são verdadeiros;
- Duas provas são necessárias:
  1. $\forall\, w : sentence, (S \Rightarrow_{G_1}^{*} w) \rightarrow (W \Rightarrow_{G_2}^{*} w^R)$
  2. $\forall\, w : sentence, (S \Rightarrow_{G_1}^{*} w) \leftarrow (W \Rightarrow_{G_2}^{*} w^R)$

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Prova informal

1. $\forall\, w : sentence, (S \Rightarrow^*_{G_1} w) \rightarrow (W \Rightarrow^*_{G_2} w^R)$

- Hipótese 1: $w : sentence$;
- Hipótese 2: $S \Rightarrow^*_{G_1} w$;
- Sabe-se que $S \Rightarrow^*_{G_1} S$;
- Em outras palavras $S \Rightarrow^*_{G_1} prefix(0, w)S$
- Portanto $i = 0$;
- Portanto $N = S$;
- Aplicação de `rl_to_rl_derives_1a` nas hipóteses acima resulta em $W \Rightarrow^*_{G_2} w^R S$;
- Sabe-se que $S \rightarrow \epsilon \in P_2$;
- Logo, $W \Rightarrow^*_{G_2} w^R S \Rightarrow_{G_2} w^R$ e $w^R \in L(G_2)$.

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Prova informal

2. $\forall\, w : sentence, (S \Rightarrow^*_{G_1} w) \leftarrow (W \Rightarrow^*_{G_2} w^R)$

- Para esta prova, vamos supor que todas as regras de G_1 são do tipo $X \rightarrow \sigma Y$ ou $X \rightarrow Y$ com uma única regra vazia $Z \rightarrow \epsilon$;
- Em outras palavras, vamos supor que G_1 encontra-se na forma normal proposta acima e detalhada a seguir.

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Formal normal

Forma normal para GLD G resultando em G':

- Se $X \to \sigma Y \in P$, então $X \to \sigma Y \in P'$;
- Se $X \to Y \in P$, então $X \to Y \in P'$;
- Se $X \to \sigma \in P$, então:
  - Se G' já possui uma regra vazia $Z \to \epsilon$, então $X \to \sigma Z \in P'$;
  - Se G' ainda não possui uma regra vazia, então $X \to \sigma Z \in P'$ e $Z \to \epsilon \in P'$, onde Z é um novo símbolo não-terminal de G'.
- Se $X \to \epsilon \in P$, então:
  - Se G' já possui uma regra vazia $Z \to \epsilon$, então $X \to Z \in P'$;
  - Se G' ainda não possui uma regra vazia, então $X \to \epsilon \in P'$.

Necessário formalizar a construção de G' a partir de G;
Necessário provar formalmente que $L(G') = L(G)$.

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Prova informal

2. $\forall\, w : sentence, (S \Rightarrow^*_{G_1} w) \leftarrow (W \Rightarrow^*_{G_2} w^R)$

- Hipótese: $W \Rightarrow^*_{G_2} w^R$;
- Supondo que G_1 está na forma normal, então existe uma única regra com W do lado esquerdo em G_2, e esta regra é $W \rightarrow Z$;
- Logo, $W \Rightarrow_{G_2} Z \Rightarrow^*_{G_2} w^R$ e $W \Rightarrow_{G_2} Z$;
- Em outras palavras, $W \Rightarrow_{G_2} prefix(|w| - |w|, w^R)Z$
- Considere $i = |w|$;
- Considere $N = Z$;
- Aplicação de `rl_to_rl_derives_1b` nas hipóteses acima resulta em $S \Rightarrow^*_{G_1} (w^R)^R Z$;
- Como é sabido que $Z \rightarrow \epsilon \in P_1$, segue que $S \Rightarrow^*_{G_1} wZ \Rightarrow^*_{G_1} w$ e portanto $w \in L(G_1)$.