Gramáticas Lineares à Direita e à Esquerda

Prof. Marcus Vinícius Midena Ramos

Universidade Federal do Vale do São Francisco

28 de setembro de 2019

marcus.ramos@univasf.edu.br
www.univasf.edu.br/~marcus.ramos

Parte 1

Dada uma G.L.D,
obter uma G.L.E que
gera a linguagem reversa.

G.L.D. para G.L.E. com linguagem reversa

Algoritmo

G.L.D.

$G_1 = (V, \Sigma, P_1, S)$

- $\alpha \to \beta \in P_1$
- $\beta \in (\Sigma \cup \{\epsilon\})(N \cup \{\epsilon\})$

G.L.E.

$G_2 = (V, \Sigma, P_2, S)$

- $\alpha \to \beta \in P_1$, $\alpha \to \beta^R \in P_2$
- $\beta \in (N \cup \{\epsilon\})(\Sigma \cup \{\epsilon\})$

G.L.D. para G.L.E. com linguagem reversa

Teorema

$$L(G_1) = L(G_2)^R$$

ou ainda

$$\forall\, G_1(G.L.D.), \exists\, G_2(G.L.E.), L(G_1) = L(G_2)^R$$

G.L.D. para G.L.E. com linguagem reversa

Exemplo

G.L.D. G_1:

- $S \to aS$
- $S \to X$
- $X \to bX$
- $X \to Y$
- $Y \to cY$
- $Y \to \epsilon$

$L(G_1) = a^*b^*c^*$

G.L.D. para G.L.E. com linguagem reversa

Exemplo (continuação)

G.L.E. G_2:

- $S \rightarrow Sa$
- $S \rightarrow X$
- $X \rightarrow Xb$
- $X \rightarrow Y$
- $Y \rightarrow Yc$
- $Y \rightarrow \epsilon$

$L(G_2) = c^*b^*a^* = L(G_1)^R$

G.L.D. para G.L.E. com linguagem reversa

Teorema

$$\forall\, w : sf, (S \Rightarrow^*_{G_1} w) \Leftrightarrow (S \Rightarrow^*_{G_2} w^R)$$

ou ainda

$$\forall\, w : sf, (S \Rightarrow^n_{G_1} w) \Leftrightarrow (S \Rightarrow^n_{G_2} w^R)$$

$$\forall w : sf, (S \Rightarrow_{G_1}^{n} w) \Leftrightarrow (S \Rightarrow_{G_2}^{n} w^R)$$

Duas provas independentes porém similares:

condição suficiente $\forall w : sf, (S \Rightarrow_{G_1}^{n} w) \Rightarrow (S \Rightarrow_{G_2}^{n} w^R)$

condição necessária $\forall w : sf, (S \Rightarrow_{G_1}^{n} w) \Leftarrow (S \Rightarrow_{G_2}^{n} w^R)$

$$\forall w : sf, (S \Rightarrow_{G_1}^{n} w) \Rightarrow (S \Rightarrow_{G_2}^{n} w^R)$$

Por indução em n:

- Caso base:
  $\forall w : sf, (S \Rightarrow_{G_1}^{0} w) \Rightarrow (S \Rightarrow_{G_2}^{0} w^R)$
- Passo de indução:
  $(\forall w : sf, (S \Rightarrow_{G_1}^{n} w) \Rightarrow (S \Rightarrow_{G_2}^{n} w^R)) \Rightarrow$
  $(\forall w : sf, (S \Rightarrow_{G_1}^{n+1} w) \Rightarrow (S \Rightarrow_{G_2}^{n+1} w^R))$

- Caso base:

início 1	$(S \Rightarrow^0_{G_1} w) \Rightarrow (S \Rightarrow^0_{G_2} w^R)$
hipótese 2	$S \Rightarrow^0_{G_1} w$, de (1)
conclusão 3	$w = S$, de (2)
conclusão 4	$w = S = S^R = w^R$, de (3)
conclusão 5	$S \Rightarrow^0_{G_2} w^R$, de (4 e teorema)

G.L.D. para G.L.E. com linguagem reversa

Prova informal (condição suficiente)

- Passo de indução:

início 1 $(\forall w : sf, (S \Rightarrow^{n}_{G_1} w) \Rightarrow (S \Rightarrow^{n}_{G_2} w^R)) \Rightarrow$
$(\forall w : sf, (S \Rightarrow^{n+1}_{G_1} w) \Rightarrow (S \Rightarrow^{n+1}_{G_2} w^R))$

hipótese 2 $\forall w : sf, (S \Rightarrow^{n}_{G_1} w) \Rightarrow (S \Rightarrow^{n}_{G_2} w^R)$, de (1)

hipótese 3 $S \Rightarrow^{n+1}_{G_1} w$, de (1)

conclusão 4 $S \Rightarrow^{n}_{G_1} xAz$, $A \rightarrow y$ e $xyz = w$, de (3)

conclusão 5 $A \rightarrow y^R \in G_2$, de (algoritmo)

conclusão 6 $(S \Rightarrow^{n}_{G_2} (xAz)^R)$, de (2 e 4)

conclusão 7 $(S \Rightarrow^{n}_{G_2} z^R A x^R)$, de (6)

conclusão 8 $(S \Rightarrow^{n+1}_{G_2} z^R y^R x^R)$, de (5 e 7)

conclusão 9 $(S \Rightarrow^{n+1}_{G_2} w^R)$, de (8)

G.L.D. para G.L.E. com linguagem reversa

Prova informal (condição necessária)

$$\forall w : sf, (S \Rightarrow^{n}_{G_1} w) \Leftarrow (S \Rightarrow^{n}_{G_2} w^R)$$

Por indução em n:

- Caso base:
  $(S \Rightarrow^{0}_{G_1} w) \Leftarrow (S \Rightarrow^{0}_{G_2} w^R)$
- Passo de indução:
  $((S \Rightarrow^{n}_{G_1} w) \Leftarrow (S \Rightarrow^{n}_{G_2} w^R)) \Rightarrow ((S \Rightarrow^{n+1}_{G_1} w) \Leftarrow (S \Rightarrow^{n+1}_{G_2} w^R))$
- Similar ao caso anterior.

Parte 2

Dada uma G.L.D,
obter uma G.L.D que
gera a linguagem reversa.

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa
Algoritmo

G.L.D.

$G_1 = (V, \Sigma, P_1, S)$

- $\alpha \rightarrow \beta \in P_1$
- $\beta \in (\Sigma \cup \{\epsilon\})(N \cup \{\epsilon\})$

G.L.D.

$G_2 = (V \cup \{W\}, \Sigma, P_2, W)$

- $X \rightarrow aY \in P_1$, $Y \rightarrow aX \in P_2$
- $X \rightarrow Y \in P_1$, $Y \rightarrow X \in P_2$
- $X \rightarrow a \in P_1$, $W \rightarrow aX \in P_2$
- $X \rightarrow \epsilon \in P_1$, $W \rightarrow X \in P_2$
- $S \rightarrow \epsilon \in P_2$

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Teorema

$$L(G_1) = L(G_2)^R$$

ou ainda

$$\forall\, G_1(G.L.D.), \exists\, G_2(G.L.D.), L(G_1) = L(G_2)^R$$

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa
Exemplo

G.L.D. G_1:

- $S \to aS$
- $S \to X$
- $X \to bX$
- $X \to Y$
- $Y \to cY$
- $Y \to \epsilon$

$L(G_1) = a^*b^*c^*$

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Exemplo (continuação)

G.L.D. G_2:

- $S \rightarrow aS$
- $X \rightarrow S$
- $X \rightarrow bX$
- $Y \rightarrow X$
- $Y \rightarrow cY$
- $W \rightarrow Y$
- $S \rightarrow \epsilon$

$L(G_2) = c^*b^*a^* = L(G_1)^R$

G.L.D. para G.L.D. com linguagem reversa

Teorema

$$\forall\, w : sentence, (S \Rightarrow^{*}_{G_1} w) \Leftrightarrow (W \Rightarrow^{*}_{G_2} w^R)$$

ou ainda

$$\forall\, w : sentence, (S \Rightarrow^{n}_{G_1} w) \Leftrightarrow (W \Rightarrow^{n+1}_{G_2} w^R)$$