Dedução Natural

Marcus Vinícius Midena Ramos

UNIVASF

23 de Novembro de 2018

mvmr@cin.ufpe.br
marcus.ramos@univasf.edu.br
(25 de novembro de 2018, 11:17)

Lógica Proposicional

Lógica Proposicional

- Fórmulas que usam *variáveis lógicas (ou proposicionais)* e *conectivos (ou operadores) lógicos*.

$$
\begin{array}{rcl}
formula & ::= & variable \\
& | & \bot \\
& | & \top \\
& | & (formula \wedge formula) \\
& | & (formula \vee formula) \\
& | & (formula \Rightarrow formula) \\
& | & (formula \Leftrightarrow formula) \\
& | & (\neg formula) \\
variable & ::= & a \,|\, b \,|\, c \,|\, \ldots
\end{array}
$$

Lógica Proposicional

Conectivos lógicos:

- $\wedge$: Conjunção ("e");
- $\vee$: Disjunção ("ou");
- $\Rightarrow$: Implicação ("se-então");
- $\Leftrightarrow$: Bi-implicação ($(a \Leftrightarrow b) \equiv (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$) ("se-e-somente-se");
- $\neg$: Negação ($\neg a \equiv a \Rightarrow \bot$) ("não");
- $\bot$: Falso;
- $\top$: Verdadeiro ($\top \equiv \bot \Rightarrow \bot$).

Exemplos

1. $(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (b \Rightarrow (a \Rightarrow c))$
2. $(a \wedge b) \Rightarrow (b \wedge a)$
3. $(a \vee (a \wedge b)) \Rightarrow a$
4. $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$

Lógica de Predicados

Lógica de Predicados

- Fórmulas proposicionais com a adição de *quantificadores* e *predicados*.

$$
\begin{array}{rcl}
formula & ::= & variable \\
 & | & \bot \\
 & | & \top \\
 & | & (formula \land formula) \\
 & | & (formula \lor formula) \\
 & | & (formula \Rightarrow formula) \\
 & | & (formula \Leftrightarrow formula) \\
 & | & (\neg formula) \\
(*) & | & (\forall\, variable \,.\, formula) \\
(*) & | & (\exists\, variable \,.\, formula) \\
(*) & | & pred\_name\,(arg\_list)
\end{array}
$$

Lógica de Predicados

$$
\begin{array}{rcl}
variable & ::= & a \mid b \mid c \mid \ldots \\
pred\_name & ::= & P_0 \mid P_1 \mid P_2 \mid \ldots \\
arg\_list & ::= & term \mid arg\_list\,,\, term \\
term & ::= & fun\_name\,(arg\_list) \mid term\_var \mid term\_const \\
term\_var & ::= & v_0 \mid v_1 \mid v_2 \mid \ldots \\
term\_const & ::= & c_0 \mid c_1 \mid c_2 \mid \ldots
\end{array}
$$

Lógica de Predicados

Quantificadores lógicos:

- $\forall$: Quantificador universal ("para todo");
- $\exists$: Quantificador existencial ("existe").

Exemplos

1. $\forall x.R(x,x) \Rightarrow \forall x.\exists y.R(x,y)$
2. $\exists x.\forall y.R(x,y) \Rightarrow \forall y.\exists x.R(x,y)$

Proposicional x Predicados

- A Lógica Proposicional compreende um subconjunto das fórmulas da Lógica de Predicados;
- A Lógica de Predicados é mais poderosa que a Lógica Proposicional.

Tautologias

Definições

- Tautologia: proposição que é sempre verdadeira;
- Contradição: proposição que é sempre falsa;
- Contingência: proposição que é verdadeira em pelo menos um caso e false em pelo menos um caso.

Provas

Questões fundamentais

- Argumento irrefutável de que uma proposição é uma tautologia.
- De forma o argumento é expresso?
- Irrefutável para quem?
- Como construir uma prova?

Técnicas e aplicações

Principais técnicas de prova e suas aplicações:

- Valorações e Tabelas Verdade: Lógica Proposicional apenas;
- Tablôs Semânticos: Lógica de Predicados;
- Dedução Natural: Lógica de Predicados.

Técnica 1:
Valorações e Tabelas Verdade

Valorações

Atribuição de valores lógicos (V ou F) às variáveis usadas na proposição que se deseja provar.

- Também conhecida como "interpretações";
- Uma tabela de valorações especifica todas as combinações possíveis de valores para as variáveis;
- A proposição é avaliada para cada combinação;
- A avaliação da proposição em cada caso é feita com base em tabelas verdade de cada operador (a seguir);
- Se a proposição for verdadeira para todas as combinações, então trata-se de uma tautologia e a prova está concluída;

Valorações

- Uma proposição com n variáveis produz uma tabela com 2^n entradas;
- Método exaustivo que pode gerar tabelas muito longas;
- O tempo de verificação pode se tornar excessivo e até impraticável;
- Aplicável apenas para a lógica proposicional com número não muito grande de variáveis.

Exemplo

A proposição $(\neg A \wedge B) \Rightarrow \neg A$ possui duas variáveis (A e B) em três ocorrências distintas. Logo, a tabela de valorações para esta proposição possui 4 entradas:

A	B
V	V
F	V
F	F
V	F

Tabelas Verdade

Para determinar se uma proposição é uma tautologia, deve-se avaliar a mesma observando-se:

- As diferentes valorações das variáveis;
- A precedência e a associatividade dos conectivos lógicos usados na proposição;
- As tabelas verdade dos conectivos empregados.

Negação

A	$\neg A$
V	F
F	V

Conjunção

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
F	V	F
F	F	F
V	F	F

Disjunção

A	B	$A \vee B$
V	V	V
F	V	V
F	F	F
V	F	V

Implicação

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
F	V	V
F	F	V
V	F	F

Bi-implicação

A	B	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V
F	V	F
F	F	V
V	F	F

Exemplo

Retornando ao exemplo $(\neg A \wedge B) \Rightarrow \neg A$, temos:

A	B	¬ A	¬ A ∧ B	(¬ A ∧ B) ⇒ ¬ A
V	V	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	F	V
V	F	F	F	V

Isso conclui a prova de que se trata de uma tautologia.

Técnica 2:
Tablôs Semânticos

Tablôs Semânticos

Também conhecidos como “árvores de refutação”.

- Mais eficiente que o método das valorações (pois dispensa a atribuição de valores às variáveis);
- Pode ser usado tanto na lógica proposicional quando na lógica de predicados;
- Utiliza regras de inferência para os operadores;
- Supõe que a proposição que se deseja provar é inicialmente falsa e procura-se chegar a uma contradição, de onde se conclui que ela é verdadeira;
- Pressupõe o uso da lógica clássica (dupla negação).

Tablôs Semânticos

- No caso geral, permite provar se uma fórmula (proposição) é ou não conseqüência lógica de um outro conjunto de fórmulas;
- Utliza-se o símbolo "conseqüência lógica" ($\vdash$) para separar as premissas da conclusão que se deseja provar:
  $\exists x.p(x) \vdash \neg\forall x.\neg p(x)$
- Desenvolvimento iniciado em 1935 por Gerhard Gentzen com o que é hoje conhecido como "cálculo de sequentes";
- Aperfeiçoado posteriormente por E. Beth e Raymond Smullyan.

Tablôs Semânticos

Funcionamento:

- Inicia-se com a fórmula que se deseja provar, marcando-a com a letra F à esquerda (admitindo que seja falsa);
- A partir de uma fórmula anterior marcada com V ou F, novas linhas são inseridas com informações obtidas a partir das regras de inferência. Cada linha vai ser marcada com V ou F à esquerda, conforme o caso. A linha que deu origem às novas linhas recebe a marca ✓ para indicar que já foi considerada;
- O processo prossegue enquanto houverem linhas que não foram consideradas;
- O processo termina quando for obtida uma contradição nas linhas geradas.

Exemplo

Prova de $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$, passo 1:

$$\frac{}{\text{F } (A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)}$$

Exemplo

Prova de $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$, passo 2:

$$\begin{array}{c} \hline \checkmark\ \mathsf{F}\ (A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B) \\ \mathsf{V}\ (A \wedge B) \\ \mathsf{F}\ (A \vee B) \\ \hline \end{array}$$

Exemplo

Prova de $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$, passo 3:

$$\checkmark \; \mathsf{F} \; (A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$$
$$\checkmark \; \mathsf{V} \; (A \wedge B)$$
$$\mathsf{F} \; (A \vee B)$$
$$\mathsf{V} \; A$$
$$\mathsf{V} \; B$$

Exemplo

Prova de $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$, passo 4:

$$
\begin{array}{c}
\hline
\checkmark \text{ F } (A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B) \\
\checkmark \text{ V } (A \wedge B) \\
\checkmark \text{ F } (A \vee B) \\
\text{V } A \\
\text{V } B \\
\text{F } A \\
\text{F } B \\
\times \\
\hline
\end{array}
$$

A contradição ocorre nas linhas (4,6) e (5,7). Uma delas já seria suficiente para garantir que a premissa inicial $(\neg p)$ não pode ser verdadeira. Logo, ela é falsa $(\neg\neg p)$ e, pela regra da dupla negação $(\neg\neg p \Rightarrow p)$, a proposição original é verdadeira (p), o que conclui a prova.

Técnica 3:
Dedução Natural

Características

- Cálculo para a prova de teoremas;
- Faz parte da Teoria das Provas;
- Baseada em regras de inferência simples que lembram o pensamento natural e procuram refletir o senso comum;
- Se aplica tanto à lógica proposicional quando à lógica de predicados;
- Produz provas mais compactas do que os Tablôs Semânticos;
- Cada conectivo lógico é associado a regras de introdução e de eliminação;
- Esta forma de apresentação das regras de inferência, no entanto, é típico da Teoria de Tipos e será usada mais adianta. Inicialmente, apresentaremos um conjunto básico de regras de inferência sem esta preocupação.

Características

- A prova de um teorema (proposição) é uma seqüência estruturada de regras de inferência que validam a conclusão, usualmente sem depender de nenhuma hpótese;
- A prova pode ser representada na forma de uma lista ou uma árvore;
- As representações mais utilizadas são os Diagramas de Fitch, as Provas Anotadas de Suppes e as árvores de Gentzen;
- Gentzen (1935) e Prawitz (1965);
- Originalmente desenvolvida para a lógica proposicional, for posteriormente extendida para a lógica de predicados.

Regras de Inferência Diretas (ou Primitivas)

- A seguir são apresentadas algumas regras de inferência diretas para um conjunto restrito de conectivos lógicos: conjunção ($\wedge$), disjunção ($\vee$), implicação ($\Rightarrow$) e bi-implicação ($\Leftrightarrow$);
- Cada regra tem uma linha horizontal que separa as premissas (em cima) da conclusão (embaixo);
- O conjunto exato de regras de inferência e os nomes que são dados às mesmas varia conforme o autor ou a referência;
- Este assunto será revisto e expandido depois do exemplo.

Regras de inferência para a conjunção ($\wedge$)

- *Conjunção (C)*:

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha \\ \beta\end{array}}{\alpha \wedge \beta}$$

Se duas fórmulas são verdadeiras, então a conjunção delas também é verdadeira.

Regras de inferência para a conjunção ($\wedge$)

- *Separação (S1)*:

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$$

Se a conjunção é verdadeira, então a primeira fórmula também é verdadeira.

- *Separação (S2)*:

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$$

Se a conjunção é verdadeira, então a segunda fórmula também é verdadeira.

Regras de inferência para a disjunção ($\vee$)

- *Expansão (E1)*:

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta}$$

Se uma fórmula é verdadeira, então a disjunção dela com uma segunda qualquer também é verdadeira.

- *Expansão (E2)*:

$$\frac{\beta}{\alpha \vee \beta}$$

Se uma fórmula é verdadeira, então a disjunção dela com uma primeira qualquer também é verdadeira.

Regras de inferência para a disjunção ($\vee$)

- *Silogismo Disjuntivo (SD1)*:

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha \vee \beta \\ \neg\alpha\end{array}}{\beta}$$

Se a disjunção é verdadeira e a primeira fórmula é falsa, então a segunda fórmula é verdadeira.

- *Silogismo Disjuntivo (SD2)*:

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha \vee \beta \\ \neg\beta\end{array}}{\alpha}$$

Se a disjunção é verdadeira e a segunda fórmula é falsa, então a primeira fórmula é verdadeira.

Regras de inferência para a bi-implicação ($\Leftrightarrow$)

- *Condicionais para bicondicional (CB)*:

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha \Rightarrow \beta \\ \beta \Rightarrow \alpha\end{array}}{\alpha \Leftrightarrow \beta}$$

Se a condicional ("se-então") é verdadeira nos dois sentidos, então a bicondicional ("se-e-somente-se") é verdadeira.

Regras de inferência para a bi-implicação ($\Leftrightarrow$)

- *Bicondicional para condicional (BC1)*:

$$\frac{\alpha \Leftrightarrow \beta}{\alpha \Rightarrow \beta}$$

  Se a bicondicional é verdadeira, então a primeira condicional é verdadeira.

- *Bicondicional para condicional (BC2)*:

$$\frac{\alpha \Leftrightarrow \beta}{\beta \Rightarrow \alpha}$$

  Se a bicondicional é verdadeira, então a segunda condicional é verdadeira.

Regras de inferência para a implicação ($\Rightarrow$)

- *Modus Ponens (MP)*:

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha \Rightarrow \beta \\ \alpha\end{array}}{\beta}$$

Se a implicação é verdadeira e a hipótese também é verdadeira, então a conclusão é verdadeira.

Regras de inferência para a implicação ($\Rightarrow$)

- *Regra da Prova Condicional (RPC)*:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\alpha] \\ \dots \\ \beta\end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta}$$

  - Se a conclusão é verdadeira quando a hipótese também é verdadeira, então a implicação (condicional) é verdadeira;
  - A hipótese (α) é inicialmente assumida e depois descartada; diz-se que ela é "descarregada", representado por $[\alpha]$.

Exemplo

Deseja-se provar Fba a partir das premissas:

- $Pa \Rightarrow (Qab \wedge Cq)$
- $(Qab \wedge Cq) \Rightarrow Dc$
- $Dc \Rightarrow (E \vee (\neg E \Rightarrow Fba))$
- Pa
- $\neg E$

ou seja,

$$Pa \Rightarrow (Qab \wedge Cq),$$

$$(Qab \wedge Cq) \Rightarrow Dc,$$

$$Dc \Rightarrow (E \vee (\neg E \Rightarrow Fba)),$$

$$Pa, \neg E \vdash Fba$$

Exemplo

Passo 1:

1.	$Pa \Rightarrow (Qab \wedge Cq)$	P
2.	$(Qab \wedge Cq) \Rightarrow Dc$	P
3.	$Dc \Rightarrow (E \vee (\neg E \Rightarrow Fba))$	P
4.	Pa	P
5.	$\neg E$	P

Exemplo

Passo 2:

1.	$Pa \Rightarrow (Qab \wedge Cq)$	P
2.	$(Qab \wedge Cq) \Rightarrow Dc$	P
3.	$Dc \Rightarrow (E \vee (\neg E \Rightarrow Fba))$	P
4.	Pa	P
5.	$\neg E$	P
6.	$Qab \wedge Cq$	1,4 MP

Exemplo

Passo 3:

1.	$Pa \Rightarrow (Qab \wedge Cq)$	P
2.	$(Qab \wedge Cq) \Rightarrow Dc$	P
3.	$Dc \Rightarrow (E \vee (\neg E \Rightarrow Fba))$	P
4.	Pa	P
5.	$\neg E$	P
6.	$Qab \wedge Cq$	1,4 MP
7.	Dc	2,6 MP
8.	$E \vee (\neg E \Rightarrow Fba)$	3,7 MP

Exemplo

Passo 4:

1.	$Pa \Rightarrow (Qab \wedge Cq)$	P
2.	$(Qab \wedge Cq) \Rightarrow Dc$	P
3.	$Dc \Rightarrow (E \vee (\neg E \Rightarrow Fba))$	P
4.	Pa	P
5.	$\neg E$	P
6.	$Qab \wedge Cq$	1,4 MP
7.	Dc	2,6 MP
8.	$E \vee (\neg E \Rightarrow Fba)$	3,7 MP
9.	$\neg E \Rightarrow Fba$	5,8 SD

Exemplo

Passo 5:

1.	$Pa \Rightarrow (Qab \wedge Cq)$	P
2.	$(Qab \wedge Cq) \Rightarrow Dc$	P
3.	$Dc \Rightarrow (E \vee (\neg E \Rightarrow Fba))$	P
4.	Pa	P
5.	$\neg E$	P
6.	$Qab \wedge Cq$	1,4 MP
7.	Dc	2,6 MP
8.	$E \vee (\neg E \Rightarrow Fba)$	3,7 MP
9.	$\neg E \Rightarrow Fba$	5,8 SD
10.	Fba	5,9 MP

Implicações

Trabalhando com regras de inferência hipotéticas.

- Introdução de implicações na prova;
- Por exemplo, deseja-se provar:

$$Gm \Rightarrow \neg Nm, \neg Nm \Rightarrow \neg Pm \vdash Gm \Rightarrow \neg Pm$$

Implicações

Passo 1:

1.	$Gm \Rightarrow \neg Nm$	P
2.	$\neg Nm \Rightarrow \neg Pm$	P

Implicações

Passo 2:

1.	$Gm \Rightarrow \neg Nm$	P
2.	$\neg Nm \Rightarrow \neg Pm$	P
3.	$\mid Gm$	H

Implicações

Passo 3:

1.	$Gm \Rightarrow \neg Nm$	P
2.	$\neg Nm \Rightarrow \neg Pm$	P
3.	$\mid Gm$	H
4.	$\mid \neg Nm$	1,3 MP
5.	$\mid \neg Pm$	2,4 MP

Implicações

Passo 4:

1.	$Gm \Rightarrow \neg Nm$	P
2.	$\neg Nm \Rightarrow \neg Pm$	P
3.	$\mid Gm$	H
4.	$\mid \neg Nm$	1,3 MP
5.	$\mid \neg Pm$	2,4 MP
6.	$Gm \Rightarrow \neg Pm$	3-5 RPC

Regras de Inferência Complementares

- *Ex falso quodlibet*:

$$\frac{\perp}{\alpha}$$

Do falso se prova qualquer coisa.

Regras de Inferência Complementares

- *Negação da hipótese (NI)*:

$$\dfrac{\begin{matrix}[\alpha] \\ \cdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg\alpha}$$

  - Se o falso pode ser provado a partir da premissa, então a premissa é falsa;
  - Lembrar que $\neg\alpha \equiv \alpha \Rightarrow \bot$

Regras de Inferência Derivadas

- A partir das regras anteriores, é possível obter uma quantidade adicional de regras "derivadas";
- Uma regra derivada é uma regra que pode ser provada a partir de outras não-derivadas (primitivas);
- O conjunto de regras de inferência utilizado pode conter regras primitivas e derivadas;
- O que determina a escolha é a conveniência;
- O importante é que o sistema seja correto (nenhuma fórmula falsa pode ser provada verdadeira) e completo (todas as fórmulas verdadeiras podem ser provadas);
- A seguir são apresentadas algumas das regras derivadas mais populares;
- A prova das mesmas fica como exercício.

Regras de Inferência Derivadas

- *Modus Tollens (MT)*:

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha \Rightarrow \beta \\ \neg\beta\end{array}}{\neg\alpha}$$

A única possibilidade de a implicação ser verdadeira quando a conclusão é falsa é quando a hipótese também é falsa.

Regras de Inferência Derivadas

- *Silogismo Hipotético (SH)*:

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha \Rightarrow \beta \\ \beta \Rightarrow \gamma\end{array}}{\alpha \Rightarrow \gamma}$$

  Transitividade da implicação.

Regras de Inferência Derivadas

- *Contraposição (CT)*:

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta}{\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha}$$

Provar que alfa implica em beta é a mesma coisa que provar que a negação de beta implica a negação de alfa. Técnica de prova bastante utilizada na prática.

Regras de Inferência Derivadas

- *De Morgan (DM1)*:

$$\frac{\neg(\alpha \wedge \beta)}{\neg\alpha \vee \neg\beta}$$

A negação da conjunção pode ser expressa como a disjunção das negações.

Regras de Inferência Derivadas

- *De Morgan (DM2)*:

$$\frac{\neg(\alpha \vee \beta)}{\neg\alpha \wedge \neg\beta}$$

A negação da disjunção pode ser expressa como a conjunção das negações.

Regras de Inferência Derivadas

- *Contradição (CTR)*:

$$\frac{\begin{matrix}\alpha \\ \neg\alpha\end{matrix}}{\beta}$$

Afirmações contraditórios permitem concluir qualquer coisa.

Regras de Inferência Derivadas

- *Dupla Negação Direta (DND)*:

$$\frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}$$

Se uma fórmula é verdadeira, então a sua dupla negação também é verdadeira.

Regras de Inferência Complementares

- Observe que a Dupla Negação Inversa ($\neg\neg\alpha \Rightarrow \alpha$) não foi apresentada como regra derivada;
- De fato, esta regra não pode ser provada e é assumida como um axioma na lógica clássica apenas.

- *Dupla Negação Inversa (DNI)*:

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}$$

  - Se a dupla negação de uma fórmula é verdadeira, então a fórmula é verdadeira;
  - Aceito apenas na lógica clássica.

Sistematizando o Conjunto de Regras de Inferência

Normalmente considera-se razoável supor que todo e qualquer conectivo lógico possua pelo menos duas regras de inferência: uma para introdução do mesmo na conclusão e outra para eliminação do mesmo da premissa.

- Implicação: introdução e eliminação;
- Conjunção: introdução e eliminação;
- Disjunção: introdução e eliminação;
- Falso: eliminação apenas (não se prova o Falso);
- Negação: introdução e eliminação.

Adicionalmente, precisamos de regras de introdução e eliminação para os quantificadores:

- Universal: introdução e eliminação;
- Existencial: introdução e eliminação;

Árvores de prova

Nos exemplos que seguem, as provas da deducação natural são apresentadas na forma de árvores.

- São representações gráfica intuitivas;
- Refletem o uso combinado das regras de inferência;
- Facilitam o entendimento da estrutura da prova;
- Podem ser facilmente manipuladas através de aplicativos adequados (por exemplo, Panda).

Regras de Inferência para a Implicação ($\Rightarrow$)

Introdução / *Regra da Prova Condicional (RPC)*:

$$\frac{\begin{array}{c}[a]\\ \cdots \\ b\end{array}}{a \Rightarrow b}\ (\Rightarrow I)$$

Eliminação / *Modus Ponens (MP)*:

$$\frac{a \Rightarrow b \qquad a}{b}\ (\Rightarrow E)$$

Exemplo

Teorema:

$$(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (b \Rightarrow (a \Rightarrow c))$$

Prova:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[a \Rightarrow (b \Rightarrow c)] \qquad [a]}{b \Rightarrow c}\,(\Rightarrow E) \qquad [b]}{c}\,(\Rightarrow E)}{a \Rightarrow c}\,(\Rightarrow I)}{b \Rightarrow (a \Rightarrow c)}\,(\Rightarrow I)}{(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (b \Rightarrow (a \Rightarrow c))}\,(\Rightarrow I)$$

Regras de Inferência para a Conjunção ($\wedge$)

Introdução / *Conjunção (C)*:

$$\frac{a \qquad b}{a \wedge b} \ (\wedge I)$$

Eliminação 1 / *Separação (S1)*:

$$\frac{a \wedge b}{a} \ (\wedge E_1)$$

Eliminação 2 / *Separação (S2)*:

$$\frac{a \wedge b}{b} \ (\wedge E_2)$$

Exemplo

Teorema:

$$(a \wedge b) \Rightarrow (b \wedge a)$$

Prova:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[a \wedge b]}{b}\,(\wedge E_2) \qquad \dfrac{[a \wedge b]}{a}\,(\wedge E_1)}{b \wedge a}\,(\wedge I)}{(a \wedge b) \Rightarrow (b \wedge a)}\,(\Rightarrow I)$$

Regras de Inferência para a Disjunção ($\vee$)

Introdução 1 / *Expansão 1*:

$$\frac{a}{a \vee b}\ (\vee I_1)$$

Introdução 2 / *Expansão 2*:

$$\frac{b}{a \vee b}\ (\vee I_2)$$

Eliminação / *Silogismo Disjuntivo 1 e 2*:

$$\frac{a \vee b \qquad \begin{matrix}[a]\\ \cdots \\ c\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[b]\\ \cdots \\ c\end{matrix}}{c}\ (\vee E)$$

Exemplo

Teorema:

$$(a \vee (a \wedge b)) \Rightarrow a$$

Prova:

$$\dfrac{\dfrac{[a \vee (a \wedge b)] \qquad \dfrac{[a]}{a} \qquad \dfrac{[a \wedge b]}{a}\,(\wedge E)}{a}\,(\vee E)}{(a \vee (a \wedge b)) \Rightarrow a}\,(\Rightarrow I)$$

Regras de Inferência para o Falso ($\perp$)

Introdução:

Não há.

Eliminação (*ex falso quodlibet*):

$$\frac{\perp}{a}\,(\perp E)$$

Regras de Inferência para a Negação ($\neg$)

Introdução (a mesma usada na Introdução da Implicação):

$$\frac{\begin{array}{c}[a]\\ \cdots\\ \bot\end{array}}{\neg a}\ (\neg I,\ \text{a mesma de } \Rightarrow I)$$

Eliminação (a mesma usada na Eliminação da Implicação):

$$\frac{a \qquad \neg a}{\bot}\ (\neg E,\ \text{a mesma de } \Rightarrow E)$$

Regra de Inferência Adicional para a Negação ($\neg$)

"Eliminação" (*reduction ad absurdum*):

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg a] \\ \cdots \\ \bot\end{matrix}}{a}\,(RAA)$$

Usada como axioma na Lógica Clássica apenas.

Exemplo

Teorema:

$$(a \Rightarrow b) \Rightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$$

Prova:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[a \Rightarrow b] \qquad [a]}{b}\,(\Rightarrow E) \qquad [\neg b]}{\bot}\,(\neg E)}{\neg a}\,(\Rightarrow I)}{\neg b \Rightarrow \neg a}\,(\Rightarrow I)}{(a \Rightarrow b) \Rightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)}\,(\Rightarrow I)$$

Abreviações

Note que os conectivos negação ($\neg$) e bi-implicação ($\Leftrightarrow$) são meras abreviações e podem ser representados por meio de fórmulas que empregam outros conectivos lógicos:

- $\neg\alpha \equiv \alpha \Rightarrow \perp$
- $\alpha \Leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$

Desta forma, não há/haveria necessidade de definir regras de inferências específicas para eles.
Vale a pena ainda observar que mesmo a implicação ($\Rightarrow$) também pode ser expressa em função de outros conectivos lógicos:

- $\alpha \Rightarrow \beta \equiv (\neg\alpha \vee \beta)$

Regras de Inferência para o Quantificador Universal (∀)

Introdução

$$\frac{A(x)}{\forall x.A(x)}\ (\forall I)$$

Eliminação

$$\frac{\forall x.A(x)}{A[t/x]}\ (\forall E)$$

Regras de Inferência para o Quantificador Existencial ($\exists$)

Introdução

$$\frac{A[t/x]}{\exists x.A(x)}\ (\exists I)$$

Eliminação

$$\frac{\exists x.A(x) \qquad \begin{array}{c}[A[t/x]]\\ \vdots \\ B\end{array}}{B}\ (\exists E)$$

(B não pode possuir variáveis livres introduzidas por A)

Exemplo

Teorema:

$$\forall x.R(x,x) \Rightarrow \forall x.\exists y.R(x,y)$$

Prova:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x.R(x,x)]}{R(x,x)}\,(\forall E)}{\exists y.R(x,y)}\,(\exists I)}{\forall x.\exists y.R(x,y)}\,(\forall I)}{(\forall x.R(x,x) \Rightarrow (\forall x.\exists y.R(x,y))}\,(\Rightarrow I)$$

Panda

Características

Uma ferramenta gráfica interativa para a construção de árvores de prova na Dedução Natural.

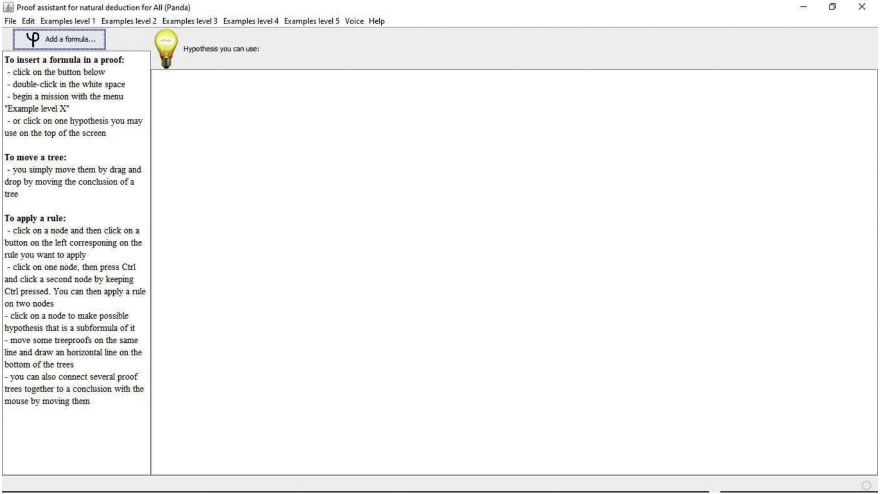
- Desenvolvida por professores franceses de lógica em cursos de Ciência da Computação;
- Construída para lidar com as dificuldades apresentadas por alunos com relação ao tema Dedução Natural;
- Sugere regras que podem ser usadas;
- Permite que provas sejam salvas e recuperadas;
- Oferece diversas listas de exercícios;
- Excelente ferramenta para consolidar o conhecimento;
- Infelizmente não está mais disponível na página dos autores, mas pode ser baixada no link informado ao final.

Características

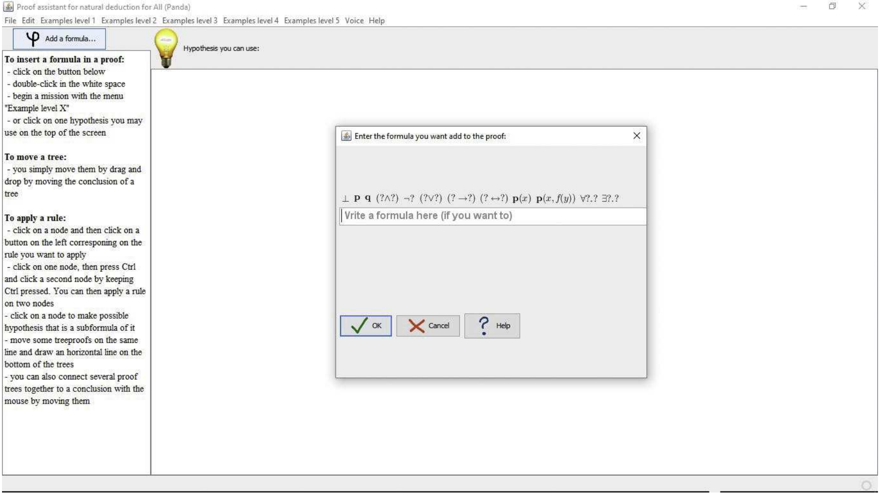
Conforme os autores:

- Fácil de instalar e usar;
- Permite a verificação de uma prova dada;
- Permite construir uma prova, com alguma assistência ou sem assistência nenhuma;
- Permite trabalhar em ambos os sentidos (top-down ou bottom-up);
- Permite uma fácil composição de subprovas para construir provas mais complexas;
- Utiliza as árvores de prova de Gentzen.

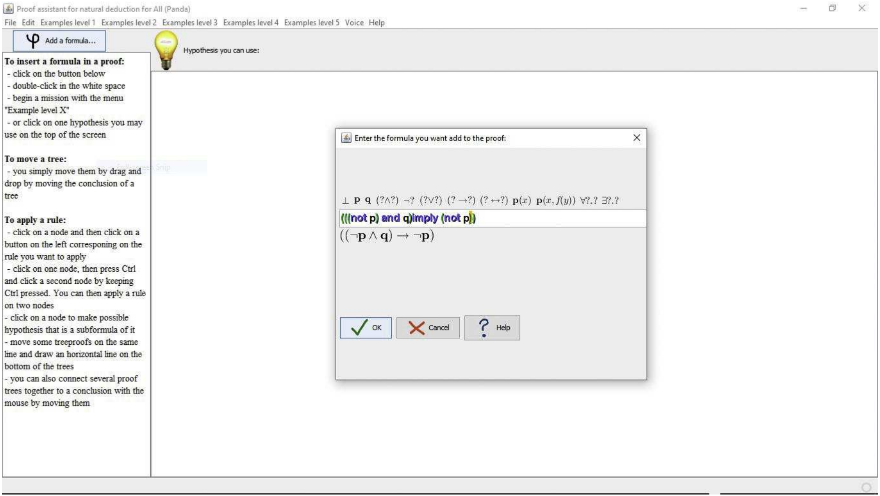
Exemplo


Proof assistant for natural deduction for All (Panda)
File Edit Examples level 1 Examples level 2 Examples level 3 Examples level 4 Examples level 5 Voice Help
Add a formula...
Hypothesis you can use:
To insert a formula in a proof:
- click on the button below
- double-click in the white space
- begin a mission with the menu "Example level X"
- or click on one hypothesis you may use on the top of the screen
To move a tree:
- you simply move them by drag and drop by moving the conclusion of a tree
To apply a rule:
- click on a node and then click on a button on the left corresponing on the rule you want to apply
- click on one node, then press Ctrl and click a second node by keeping Ctrl pressed. You can then apply a rule on two nodes
- click on a node to make possible hypothesis that is a subformula of it
- move some treeproofs on the same line and draw an horizontal line on the bottom of the trees
- you can also connect several proof trees together to a conclusion with the mouse by moving them

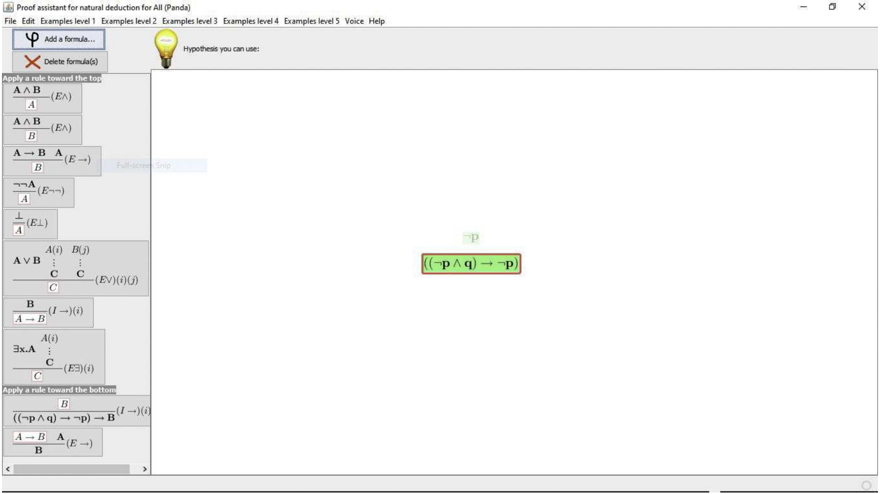
Exemplo


Proof assistant for natural deduction for All (Panda)
File Edit Examples level 1 Examples level 2 Examples level 3 Examples level 4 Examples level 5 Voice Help
Add a formula...
Hypothesis you can use:
To insert a formula in a proof:
- click on the button below
- double-click in the white space
- begin a mission with the menu "Example level X"
- or click on one hypothesis you may use on the top of the screen
To move a tree:
- you simply move them by drag and drop by moving the conclusion of a tree
To apply a rule:
- click on a node and then click on a button on the left corresponing on the rule you want to apply
- click on one node, then press Ctrl and click a second node by keeping Ctrl pressed. You can then apply a rule on two nodes
- click on a node to make possible hypothesis that is a subformula of it
- move some treeproofs on the same line and draw an horizontal line on the bottom of the trees
- you can also connect several proof trees together to a conclusion with the mouse by moving them
Enter the formula you want add to the proof:
⊥ p q (?∧?) ¬? (?∨?) (?→?) (?↔?) p(x) p(x, f(y)) ∀?.? ∃?.?
Write a formula here (if you want to)
OK
Cancel
Help

Exemplo

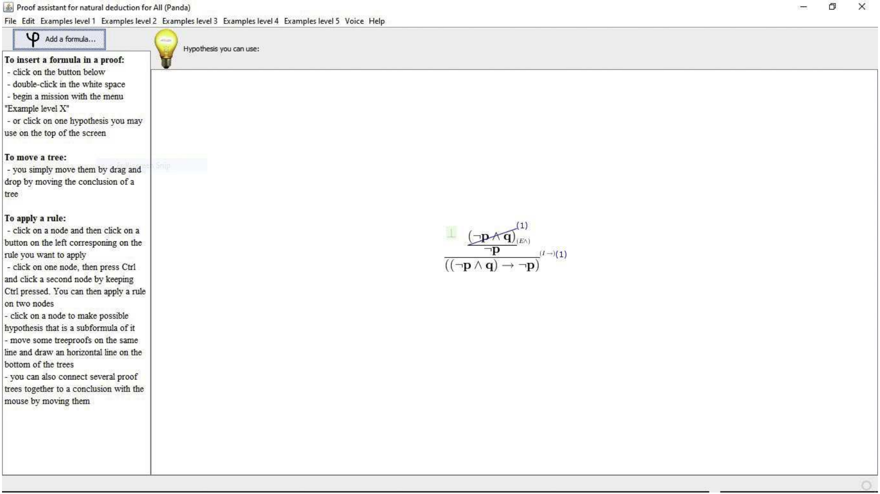

Proof assistant for natural deduction for All (Panda)
File Edit Examples level 1 Examples level 2 Examples level 3 Examples level 4 Examples level 5 Voice Help
Add a formula...
Hypothesis you can use:
To insert a formula in a proof:
- click on the button below
- double-click in the white space
- begin a mission with the menu "Example level X"
- or click on one hypothesis you may use on the top of the screen
To move a tree:
- you simply move them by drag and drop by moving the conclusion of a tree
To apply a rule:
- click on a node and then click on a button on the left corresponing on the rule you want to apply
- click on one node, then press Ctrl and click a second node by keeping Ctrl pressed. You can then apply a rule on two nodes
- click on a node to make possible hypothesis that is a subformula of it
- move some treeproofs on the same line and draw an horizontal line on the bottom of the trees
- you can also connect several proof trees together to a conclusion with the mouse by moving them
Enter the formula you want add to the proof:
⊥ p q (?∧?) ¬? (?∨?) (?→?) (?↔?) p(x) p(x, f(y)) ∀?.? ∃?.?
(((not p) and q)imply (not p))
((¬p ∧ q) → ¬p)
OK
Cancel
Help

Exemplo

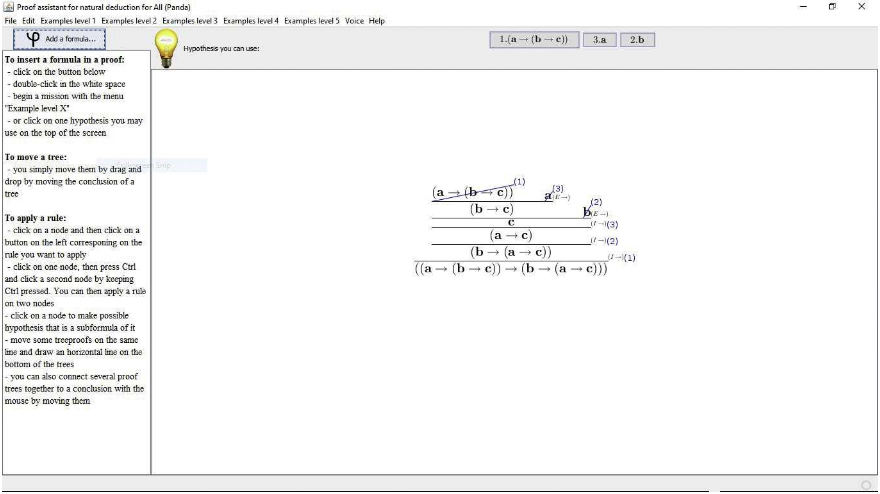


Proof assistant for natural deduction for All (Panda)
File Edit Examples level 1 Examples level 2 Examples level 3 Examples level 4 Examples level 5 Voice Help
Add a formula...
Delete formula(s)
Hypothesis you can use:
Apply a rule toward the top
(E∧)
(E→)
(E¬¬)
(E⊥)
(E∨)(i)(j)
(I→)(i)
(E∃)(i)
Apply a rule toward the bottom
((¬p ∧ q) → ¬p) → B
(I→)(i)
(E→)
¬p
((¬p ∧ q) → ¬p)

Exemplo


Proof assistant for natural deduction for All (Panda)
File Edit Examples level 1 Examples level 2 Examples level 3 Examples level 4 Examples level 5 Voice Help
Add a formula...
Hypothesis you can use:
To insert a formula in a proof:
- click on the button below
- double-click in the white space
- begin a mission with the menu "Example level X"
- or click on one hypothesis you may use on the top of the screen
To move a tree:
- you simply move them by drag and drop by moving the conclusion of a tree
To apply a rule:
- click on a node and then click on a button on the left corresponing on the rule you want to apply
- click on one node, then press Ctrl and click a second node by keeping Ctrl pressed. You can then apply a rule on two nodes
- click on a node to make possible hypothesis that is a subformula of it
- move some treeproofs on the same line and draw an horizontal line on the bottom of the trees
- you can also connect several proof trees together to a conclusion with the mouse by moving them
(¬p ∧ q)(1)
(E∧)
¬p
(I→)(1)
((¬p ∧ q) → ¬p)

Exemplo


Proof assistant for natural deduction for All (Panda)
File Edit Examples level 1 Examples level 2 Examples level 3 Examples level 4 Examples level 5 Voice Help
Add a formula...
Hypothesis you can use:
1.(a → (b → c))
3.a
2.b
To insert a formula in a proof:
- click on the button below
- double-click in the white space
- begin a mission with the menu "Example level X"
- or click on one hypothesis you may use on the top of the screen
To move a tree:
- you simply move them by drag and drop by moving the conclusion of a tree
To apply a rule:
- click on a node and then click on a button on the left corresponing on the rule you want to apply
- click on one node, then press Ctrl and click a second node by keeping Ctrl pressed. You can then apply a rule on two nodes
- click on a node to make possible hypothesis that is a subformula of it
- move some treeproofs on the same line and draw an horizontal line on the bottom of the trees
- you can also connect several proof trees together to a conclusion with the mouse by moving them
(a → (b → c)) (1)
a (3)
(b → c)
b (2)
c
(a → c) (I →)(3)
(b → (a → c)) (I →)(2)
((a → (b → c)) → (b → (a → c))) (I →)(1)

Referências

Lógica e Dedução Natural (livros)

- Introdução à lógica
  Cezar Mortari
- Type Theory and Functional Programming
  Simon Thompson

Dedução Natural (artigos)

- Natural Deduction
  Wikipedia
- Introduction to natural deduction
  Daniel Clemente Laboreo
- A History of Natural Deduction and Elementary Logic Textbooks
  Francis Jeffry Pelletier

Panda (aplicativo e artigo)

- Panda: A Proof Assistant in Natural Deduction for All.
  Olivier Gasquet, François Schwarzentruber and Martin Strecker
- Clique aqui para baixar o aplicativo
  Olivier Gasquet, François Schwarzentruber and Martin Strecker