Linguagens Sensíveis ao Contexto

Prof. Marcus Vinícius Midena Ramos

Universidade Federal do Vale do São Francisco

1 de junho de 2021

marcus.ramos@univasf.edu.br
`www.univasf.edu.br/~marcus.ramos`

Bibliografia

1. *Linguagens Formais: Teoria, Modelagem e Implementação*
   M.V.M. Ramos, J.J. Neto e I.S. Vega
   Bookman, 2009

Roteiro

Definição

Uma **gramática sensível ao contexto** $G = (V, \Sigma, P, S)$ é aquela cujas regras do conjunto P obedecem ao formato $\alpha \rightarrow \beta$, onde:

- $\alpha \in V^*NV^*$
- $\beta \in V^*$
- $|\beta| \geqslant |\alpha|$

Linguagem sensível ao contexto

- Define-se inicialmente **linguagem sensível ao contexto** como sendo aquela que possa ser definida através de uma gramática sensível ao contexto;
- Essa definição é estendida para qualquer linguagem L que contenha a cadeia vazia, desde que $L - \{\varepsilon\}$ possa ser gerada por uma gramática sensível ao contexto;
- Define-se **linguagem estritamente sensível ao contexto** como sendo uma linguagem sensível ao contexto mas não livre de contexto.

Exemplo

Exemplo 1.1

Seja a gramática $G_1 = (\{a,b,c,S,B,C\},\{a,b,c\},P,S)$, com

$$\begin{aligned} P \quad = \quad & \{S \rightarrow aSBC, \\ & S \rightarrow aBC, \\ & CB \rightarrow BC, \\ & aB \rightarrow ab, \\ & bB \rightarrow bb, \\ & bC \rightarrow bc, \\ & cC \rightarrow cc\} \end{aligned}$$

Exemplo

Algumas derivações possíveis são:

- $S \Rightarrow aBC \Rightarrow abC \Rightarrow abc$;
- $S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaBCBC \Rightarrow aaBBCC \Rightarrow aabBCC \Rightarrow aabbCC \Rightarrow aabbcC \Rightarrow aabbcc$;
- $S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaBCBCBC \Rightarrow aaaBBCCBC \Rightarrow aaaBBCBCC \Rightarrow aaaBBBCCC \Rightarrow aaabBBCCC \Rightarrow aaabbBCCC \Rightarrow aaabbbCCC \Rightarrow aaabbbcCC \Rightarrow$
  $aaabbbccC \Rightarrow aaabbbccc$.

É fácil demonstrar que $L(G_1) = \{a^n b^n c^n \mid n \geqslant 1\}$. É também possível demonstrar, pela aplicação do “Pumping Lemma” para linguagens livres de contexto, que $L(G_1)$ não é uma linguagem livre de contexto. Logo, não existe qualquer gramática livre de contexto que seja capaz de gerar $L(G_1)$, e portanto L é uma linguagem estritamente sensível ao contexto.

Exemplo

Exemplo 1.2

Considere-se a gramática $G_2 = (\{a,b,c,S,A,B,C\},\{a,b,c\},P,S)$, com

$$
\begin{aligned}
P \quad = \quad & \{S \to ABC, \\
& S \to ABCS, \\
& AB \to BA, \\
& AC \to CA, \\
& BA \to AB, \\
& BC \to CB, \\
& CA \to AC, \\
& CB \to BC, \\
& A \to a, \\
& B \to b, \\
& C \to c\}
\end{aligned}
$$

Exemplo

Analise-se agora a derivação de algumas sentenças:

- $S \Rightarrow ABC \Rightarrow aBC \Rightarrow abC \Rightarrow abc$;
- $S \Rightarrow ABC \Rightarrow ACB \Rightarrow CAB \Rightarrow CBA \Rightarrow cBA \Rightarrow cbA \Rightarrow cba$;
- $S \Rightarrow ABCS \Rightarrow ABCABC \Rightarrow BACABC \Rightarrow BACBAC \Rightarrow BACBCA \Rightarrow bACBCA \Rightarrow baCBCA \Rightarrow bacBCA \Rightarrow bacbCA \Rightarrow bacbcA \Rightarrow bacbca$.

Exemplo

A linguagem gerada por G_2 consiste em todas as sentenças sobre $\{a,b,c\}$ — com comprimento mínimo 3 —, de tal forma que as quantidades desses símbolos sejam sempre idênticas. Formalmente:

$$L(G_2) = \{w \in \Sigma^* \mid \text{ as quantidades de “}a\text{”, “}b\text{” e “}c\text{” em } w \text{ são idênticas, e } |w| \geqslant 3\}$$

Como no Exemplo 1.1, pode-se demonstrar que esta linguagem é estritamente sensível ao contexto. Para isso é suficiente provar, atavés do “Pumping Lemma”, que ela não é livre de contexto.

Gramáticas livres de contexto $\times$ sensíveis ao contexto

- A inspeção rigorosa dos formatos admitidos para as produções das gramáticas do tipo 1 não permite a caracterização imediata de toda e qualquer gramática (e conseqüentemente das correspondentes linguagens) do tipo 2 como sendo também do tipo 1;
- Isso decorre do fato de que as gramáticas do tipo 2 admitem a cadeia vazia ε como alternativa de substituição para o lado esquerdo de qualquer produção, o que não é permitido em gramáticas do tipo 1 em função da restrição $|\alpha| \leqslant |\beta|$.

Gramáticas livres de contexto $\times$ sensíveis ao contexto

Rigorosamente, uma linguagem é dita **sensível ao contexto** se e somente se:

- $\varepsilon \notin L$ e $L = L(G)$, onde G é uma gramática sensível ao contexto, ou
- $\varepsilon \in L$ e $L - \{\varepsilon\}$ pode ser gerada por uma gramática sensível ao contexto.

Linguagens livres de contexto $\times$ sensíveis ao contexto

Cumpre, neste ponto, estabelecer uma importante relação entre linguagens livres de contexto e linguagens sensíveis ao contexto:

- Suponha-se, inicialmente, que $L = L(G)$, onde G é uma gramática livre de contexto, e, adicionalmente, que $\varepsilon \notin L$;
- É fácil perceber, neste caso, que G satisfaz a todas as especificações de uma gramática sensível ao contexto, pois não haverá nenhuma regra com ε à direita;
- Logo, $L(G)$ será também uma linguagem sensível ao contexto. Ou seja: linguagens livres de contexto que não contêm a cadeia vazia são também linguagens sensíveis ao contexto.

Linguagens livres de contexto $\times$ sensíveis ao contexto

Caso $\varepsilon \in L(G)$, e G seja uma gramática livre de contexto, será necessário aplicar transformações em G obtendo-se G', de modo que:

- $S \to \varepsilon$ seja a única regra vazia em G';
- S não compareça no lado direito de nenhuma outra regra de G';
- $L(G) = L(G')$.

Gramáticas livres de contexto $\times$ sensíveis ao contexto

- Portanto, com exceção da produção $S \rightarrow \varepsilon$, as gramáticas do tipo 2 podem ser sempre convertidas para um formato que as torne um caso particular das gramáticas do tipo 1;
- Em outras palavras, tem-se que qualquer gramática do tipo 2, desde que devidamente convertida para esse formato padronizado, e a menos da produção $S \rightarrow \varepsilon$, torna-se também uma gramática do tipo 1.

Linguagens livres de contexto $\times$ sensíveis ao contexto

- Assim, é fato que G', exceto pela regra vazia, é uma gramática sensível ao contexto e, conseqüentemente, $L(G') - \{\varepsilon\}$ é uma linguagem sensível ao contexto;
- Logo, $L(G) = L(G')$ é, de acordo com a definição, uma linguagem sensível ao contexto;
- Como conseqüência, pode-se concluir que toda linguagem livre de contexto é também uma linguagem sensível ao contexto;
- Fica claro, também, que as linguagens livres de contexto constituem um subconjunto próprio das linguagens sensíveis ao contexto.

Exemplo

Exemplo 1.3

$$
\begin{array}{rcl}
\{Programa & \rightarrow & Declaracoes\ Comandos, \\
Declaracoes & \rightarrow & Declaracoes\ Declaracao \\
 & & \mid \varepsilon, \\
Declaracao & \rightarrow & \text{“\%”}Identificador, \\
Comandos & \rightarrow & Comandos\ Comando \\
 & & \mid \varepsilon, \\
Comando & \rightarrow & \text{“\#”}Identificador\text{“}=\text{”}Expressao, \\
Expressao & \rightarrow & Expressao\text{“}+\text{”}Expressao \\
 & & \mid Expressao\text{“}*\text{”}Expressao \\
 & & \mid Identificador, \\
Identificador & \rightarrow & \text{“}a\text{”} \mid \text{“}b\text{”} \mid \text{“}c\text{”}\}
\end{array}
$$

Exemplo

Exemplo de sentença pertencente a esta linguagem:

$$
\begin{aligned}
&\%a \\
&\%b \\
&\#a = a + b \\
&\#b = b * b
\end{aligned}
$$

Exemplo

Exemplo de sentença não pertencente a esta linguagem:

$$
\begin{aligned}
&\%a \\
&\%c \\
&\#a = a + b \\
&\#b = b * b
\end{aligned}
$$

Formalização de linguagens sensíveis ao contexto

- Possível, mas trabalhosa;
- Produz especificações longas, complexas e com baixa legibilidade;
- Difícil utilização prática;
- Por isso, adota-se a representação “livre de contexto” na formalização gramatical, deixando para processamento posterior a verificação das dependências de contexto que a linguagem porventura exiba.

Explicitando o contexto

É conveniente considerar uma importante forma normal para a representação de gramáticas do tipo 1. Nesta forma, as regras são todas reescritas em conformidade com o seguinte padrão:

$$\alpha A \gamma \to \alpha \beta \gamma$$

com $A \in N, \beta \in V^+$ e $\alpha, \gamma \in V^*$.
Demonstra-se que toda e qualquer gramática do tipo 1 pode ser convertida para uma nova gramática em que todas as produções obedecem ao formato acima apresentado, exceto, naturalmente, a produção $S \to \varepsilon$, caso a cadeia vazia faça parte da linguagem.

Explicitando o contexto

- Isso feito, pode-se reinterpretar as produções como especificações de substituições para um determinado não-terminal A por β, apenas quando A estiver cercado das cadeias α e γ, ou seja, quando A estiver no **contexto** de α e γ;
- Portanto, diz-se que a substituição de A por β **depende** da ocorrência de um contexto esquerdo α e de um contexto direito γ para o não-terminal A, fato este que motiva o emprego do termo alternativo **dependente de contexto** para designar as gramáticas do tipo 1.

Explicitando o contexto

Deve-se, por outro lado, perceber que uma condição deste tipo nunca ocorre com as gramáticas do tipo 2, nas quais qualquer substituição de um símbolo não-terminal ocorre sempre de forma independente do contexto em que tal não-terminal é encontrado, motivando dessa maneira o emprego do nome “livre de contexto” para designar tais gramáticas.

Forma Normal de Kuroda

Uma outra importante forma normal para as gramáticas sensíveis ao contexto é a Forma Normal de Kuroda. Apesar de não evidenciar diretamente os contextos em que são feitas as substituições, como no caso da forma normal anterior, ela é utilizada em certas demonstrações teóricas. Formalmente, diz-se que uma gramática sensível ao contexto encontra-se na **Forma Normal de Kuroda** se todas as suas produções $\alpha \rightarrow \beta$ estiverem em conformidade com alguma das seguintes condições:

- $\alpha \in N$ e $\beta \in \Sigma$;
- $\alpha \in N$ e $\beta \in N$;
- $\alpha \in N$ e $\beta \in NN$;
- $\alpha \in NN$ e $\beta \in NN$;

Características

Uma **Máquina de Turing com fita limitada** é um dispositivo não-determinístico de reconhecimento de cadeias que possui algumas importantes extensões em relação aos autômatos finitos ou aos autômatos de pilha. As mais importantes são:

1. A fita de trabalho possui comprimento igual ao comprimento da cadeia de entrada, acrescido de dois (uma posição para indicar o início da cadeia e outra para indicar seu término; tais indicações são feitas através de símbolos especiais, não pertencentes ao alfabeto de entrada);
2. O cursor de acesso aos símbolos da fita de trabalho pode se deslocar, sob o comando do controle finito, tanto para a direita quanto para a esquerda;
3. Através do cursor de acesso pode-se não apenas ler os símbolos contidos na posição corrente da fita de trabalho, como também gravar novos símbolos em substituição ao símbolos existentes.

Formalização

Formalmente, uma Máquina de Turing com fita limitada M é definida como:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, <, >, F)$$

onde:

- Q é o conjunto finito de estados;
- Σ é o alfabeto de entrada, composto por um conjunto finito de símbolos;
- Γ é o conjunto, também finito, de símbolos que podem ser lidos e/ou gravados na fita de trabalho. $\Sigma \subseteq \Gamma$;

Formalização

- δ é a função parcial de transição, compreendendo os seguintes mapeamentos:
  - $Q \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma \times \{E,D\}}$
  - $Q \times \{<\} \rightarrow 2^{Q \times \{<\} \times \{D\}}$
  - $Q \times \{>\} \rightarrow 2^{Q \times \{>\} \times \{E\}}$
- q_0 é o estado inicial, $q_0 \in Q$;
- $<, > \notin \Gamma$ são símbolos respectivamente situados imediatamente à esquerda e imediatamente à direita da cadeia de entrada na configuração inicial;
- $F \subseteq Q$ é o conjunto de estados finais.

Transição

Considere-se a transição $\delta(q_i, \sigma_m) = \{(q_j, \sigma_n, E)\}$. As seguintes ações são tomadas, nesta seqüência, após a seleção dessa transição:

- O estado corrente q_i é substituído pelo novo estado q_j;
- O símbolo correntemente apontado pelo cursor de acesso, σ_m, é substituído, na fita de trabalho, pelo novo símbolo σ_n;
- O cursor de acesso é deslocado de uma posição para a esquerda (E).

Ações similares são executadas quando a transição especifica uma movimentação para a direita (D). A única diferença, neste caso, é que o cursor se desloca no sentido oposto.

Configuração

A **configuração** de uma Máquina de Turing com fita limitada é denotada através da tripla

$$(\alpha, q_k, \beta) \in \{<\}\Gamma^* \times Q \times \Gamma^*\{>\}$$

em que q_k é o estado corrente, $\alpha \in \{<\}\Gamma^*$ é a porção da cadeia de entrada que se encontra à esquerda do cursor de acesso e $\beta \in \Gamma^*\{>\}$ é a porção da cadeia de entrada que se encontra à direita do cursor de acesso, incluindo a posição por ele correntemente selecionada. Note-se que "$<$" e "$>$" podem ocorrer, cada um, no máximo uma vez em $\alpha\beta$, e sempre nos respectivos extremos.

Configuração inicial

A **configuração inicial** é $(<, q_0, \gamma >)$, onde q_0 é o estado inicial e $\gamma \in \Sigma^*$ é a cadeia de entrada a ser analisada. O cursor de acesso refere-se, portanto, ao símbolo inicial (mais à esquerda) da cadeia γ. A porção α da representação (α, q_k, β) corresponde, neste caso, apenas ao símbolo "$<$", pois não existe fita à esquerda deste delimitador. A **configuração final** é definida como (λ, q_f, μ), com $q_f \in F, \lambda \in \{<\}\Gamma^*$ e $\mu \in \Gamma^*\{>\}$.

Movimentação

O símbolo "$\vdash$" denota uma relação sobre as configurações de uma Máquina de Turing com fita limitada:

$$\vdash: \{<\}\Gamma^* \times Q \times \Gamma^*\{>\} \rightarrow \{<\}\Gamma^* \times Q \times \Gamma^*\{>\}$$

Portanto, a movimentação de uma configuração (α, q_k, β) para a configuração seguinte (α', q_m, β') é representada como:

$$(\alpha, q_k, \beta) \vdash (\alpha', q_m, \beta')$$

As transições contidas na função δ especificam possibilidades de movimentação, que conduzem o dispositivo de cada possível configuração para a correspondente configuração seguinte. Diz-se que o dispositivo **pára** quando a função δ não estiver definida para o par (estado, símbolo de entrada) corrente.

Linguagem aceita

A linguagem aceita por uma Máquina de Turing com fita limitada é o conjunto de todas as cadeias que são capazes de conduzir o dispositivo desde a sua configuração inicial (única para cada cadeia de entrada) até uma configuração final qualquer, sem possibilidade de movimentação adicional. Formalmente:

$$L(M) = \{\gamma \in \Sigma^* \mid (<, q_0, \gamma >) \vdash^* (\lambda, q_f, \mu),$$

$$\text{com } q_f \in F, \lambda \in \{<\}\Gamma^* \text{ e } \mu \in \Gamma^*\{>\}\}$$

Admite-se, como condição de parada, que $\mu = \sigma\pi$,
com $\sigma \in (\Gamma \cup \{<, >\}), \pi \in (\Gamma^*\{>\} \cup \{\varepsilon\})$ e δ não seja definida para (q_f, σ).

Configuração final

Deve-se, por último, notar que, diferentemente dos autômatos finitos e dos autômatos de pilha, as Máquinas de Turing com fita limitada não exigem, como pré-requisito para a caracterização de uma configuração final, que a cadeia de entrada tenha sido esgotada ou, ainda, que o cursor de acesso se encontre à direita do último símbolo da referida cadeia. Configurações finais são caracterizadas quando (i) não há transição possível de ser aplicada na configuração corrente e (ii) o estado corrente é final, não importando a posição do cursor de acesso.

Exemplo

Exemplo 3.1
A Máquina de Turing com fita limitada $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, <, >, F)$ mostrada na Figura 1 aceita a linguagem a^*b^*.

$$
\begin{aligned}
Q &= \{q_0, q_1, q_2\} \\
\Sigma &= \{a, b\} \\
\Gamma &= \{a, b\} \\
\delta &= \{(q_0, a) \to (q_0, a, D), (q_0, b) \to (q_1, b, D), (q_0, >) \to (q_2, >, E), \\
&\quad (q_1, b) \to (q_1, b, D), (q_1, >) \to (q_2, >, E)\} \\
F &= \{q_2\}
\end{aligned}
$$

Exemplo

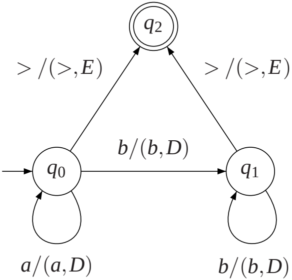

Figura 1: Máquina de Turing com fita limitada que aceita a^*b^*

Exemplo

- Exemplo de cadeia reconhecida: *aabbb*

  $(<, q_0, aabbb >) \vdash (< a, q_0, abbb >) \vdash (< aa, q_0, bbb >) \vdash (< aab, q_1, bb >) \vdash (< aabb, q_1, b >) \vdash (< aabbb, q_1, >) \vdash (< aabb, q_2, b >)$

  Como não há movimentação possível a partir da configuração $(< aabb, q_2, b >)$, que é final, a máquina pára e a cadeia *aabbb* é aceita.

- Exemplo de cadeia rejeitada: *aaba*

  $(<, q_0, aaba >) \vdash (< a, q_0, aba >) \vdash (< aa, q_0, ba >) \vdash (< aab, q_1, a >)$

  Como não há movimentação possível a partir da configuração $(< aab, q_1, a >)$, que não é final, a máquina pára e a cadeia *aaba* é rejeitada.

Exemplo

Exemplo 3.2

A Máquina de Turing com fita limitada $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, <, >, F)$ da Figura 2 aceita a linguagem $\{a^n b^n \mid n \geqslant 1\}$.

$$
\begin{array}{rcl}
Q & = & \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\} \\
\Sigma & = & \{a, b\} \\
\Gamma & = & \{a, b, X, Y\} \\
\delta & = & \{(q_0, a) \rightarrow (q_1, X, D), (q_0, b) \rightarrow (q_5, b, D), (q_0, Y) \rightarrow (q_3, Y, D), \\
& & (q_1, a) \rightarrow (q_1, a, D), (q_1, Y) \rightarrow (q_1, Y, D), (q_1, b) \rightarrow (q_2, Y, E), \\
& & (q_1, >) \rightarrow (q_5, >, E), (q_2, X) \rightarrow (q_0, X, D), (q_2, Y) \rightarrow (q_2, Y, E), \\
& & (q_2, a) \rightarrow (q_2, a, E), (q_3, Y) \rightarrow (q_3, Y, D), (q_3, b) \rightarrow (q_5, b, D), \\
& & (q_3, >) \rightarrow (q_4, >, E)\} \\
F & = & \{q_4\}
\end{array}
$$

Exemplo

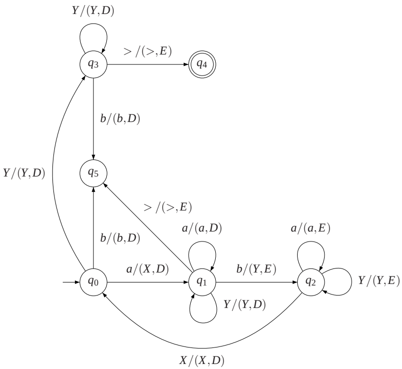

Figura 2: Máquina de Turing com fita limitada que aceita $\{a^n b^n \mid n \geqslant 1\}$

Exemplo

Seu funcionamento é intuitivo e reflete a aplicação do seguinte algoritmo:

1. O símbolo “a” sob o cursor é substituído pelo símbolo “X”. O cursor é deslocado de uma posição, para a direita.
2. O cursor continua se deslocando para a direta até encontrar um símbolo “b” ou o símbolo “$>$”.
3. Se encontrar “$>$”, a cadeia é rejeitada, pois existem mais símbolos “a” do que “b”. Se encontrar “b”, este será substituído por “Y” e o cursor será deslocado para a esquerda até encontrar o “X” mais à direita. Neste momento, o cursor é deslocado de uma posição para a direita e reinicia-se todo o processo no passo (1).
4. Se o símbolo corrente for “Y”, isso indica que já foram considerados todos os símbolos “a”. Se o restante da cadeia de entrada for formada apenas por símbolos “Y”, ela será aceita. Caso contrário, será rejeitada. É o caso, por exemplo, de cadeias que contêm mais símbolos “b” do que símbolos “a”.

Exemplo

A seguir, confere-se a operação de M com algumas cadeias:

- A cadeia $aabb$ é aceita:

  $(<, q_0, aabb>) \vdash (<X, q_1, abb>) \vdash (<Xa, q_1, bb>) \vdash (<X, q_2, aYb>) \vdash (<, q_2, XaYb>) \vdash (<X, q_0, aYb>) \vdash (<XX, q_1, Yb>) \vdash (<XXY, q_1, b>) \vdash (<XX, q_2, YY>) \vdash (<X, q_2, XYY>) \vdash (<XX, q_0, YY>) \vdash (<XXY, q_3, Y>) \vdash (<XXYY, q_3, >) \vdash (<XXY, q_4, Y>)$

- A cadeia aab é rejeitada:

  $(<, q_0, aab>) \vdash (<X, q_1, ab>) \vdash (<Xa, q_1, b>) \vdash (<X, q_2, aY>) \vdash (<, q_2, XaY>) \vdash (<X, q_0, aY>) \vdash (<XX, q_1, Y>) \vdash (<XXY, q_1, >) \vdash (<XX, q_5, Y>)$

- A cadeia abb é rejeitada:

  $(<, q_0, abb>) \vdash (<X, q_1, bb>) \vdash (<, q_2, XYb>) \vdash (<X, q_0, Yb>) \vdash (<XY, q_3, b>) \vdash (<XYb, q_5, >)$

Exemplo

Neste exemplo, a Máquina de Turing com fita limitada está sendo utilizada para reconhecer uma linguagem livre de contexto, e tal fato sugere que esse tipo de dispositivo possa ser empregado também no reconhecimento desta categoria de linguagens, em substituição aos autômatos de pilha.

Além de necessitar da movimentação do cursor em ambos os sentidos, neste exemplo a substituição (gravação) de um símbolo do alfabeto de entrada por símbolos que não fazem parte deste alfabeto (no caso, "a" por "X" e "b" por "Y") é essencial para o seu correto funcionamento.

Exemplo

Exemplo 3.3
A Máquina de Turing com fita limitada da Figura 3 reconhece a linguagem $\{wcw \mid w \in \{a,b\}^*\}$ sobre o alfabeto $\{a,b,c\}$.

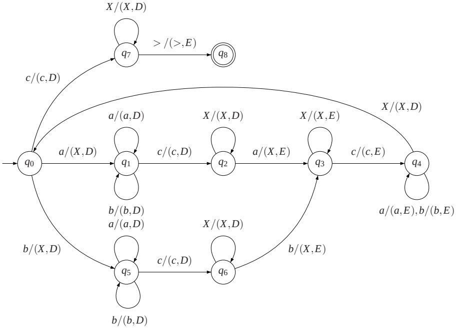

Figura 3: Máquina de Turing com fita limitada que aceita $\{wcw \mid w \in \{a,b\}^*\}$

Exemplo

Este exemplo ilustra o reconhecimento de uma linguagem tipicamente sensível ao contexto, pois a subcadeia "w" deve ser a mesma em ambos os lados do símbolo "c". Tal característica remete à relação entre a declaração e o uso de nomes, encontrada na maioria das linguagens de programação algorítmicas tradicionais — um nome só pode ser usado se a sua declaração for visível no local do uso.

Exemplo

- Exemplo de cadeia reconhecida: *abbcabb*

$$
\begin{aligned}
&(<, q_0, abbcabb >) \vdash (< X, q_1, bbcabb >) \vdash (< Xb, q_1, bcabb >) \vdash \\
&(< Xbb, q_1, cabb >) \vdash (< Xbbc, q_2, abb >) \vdash (< Xbb, q_3, cXbb >) \vdash \\
&(< Xb, q_4, bcXbb >) \vdash (< X, q_4, bbcXbb >) \vdash (<, q_4, XbbcXbb >) \vdash \\
&(< X, q_0, bbcXbb >) \vdash (< XX, q_5, bcXbb >) \vdash (< XXb, q_5, cXbb >) \vdash \\
&(< XXbc, q_6, Xbb >) \vdash (< XXbcX, q_6, bb >) \vdash (< XXbc, q_3, XXb >) \vdash \\
&(< XXb, q_3, cXXb >) \vdash (< XX, q_4, bcXXb >) \vdash (< X, q_4, XbcXXb >) \vdash \\
&(< XX, q_0, bcXXb >) \vdash (< XXX, q_5, cXXb >) \vdash (< XXXc, q_6, XXb >) \vdash \\
&(< XXXcX, q_6, Xb >) \vdash (< XXXcXX, q_6, b >) \vdash (< XXXcX, q_3, XX >) \vdash \\
&(< XXXc, q_3, XXX >) \vdash (< XXX, q_3, cXXX >) \vdash (< XX, q_4, XcXXX >) \vdash \\
&(< XXX, q_0, cXXX >) \vdash (< XXXc, q_7, XXX >) \vdash (< XXXcX, q_7, XX >) \vdash \\
&(< XXXcXX, q_7, X >) \vdash (< XXXcXXX, q_7, >) \vdash (< XXXcXX, q_8, X >)
\end{aligned}
$$

Exemplo

Pode-se demonstrar, através do “Pumping Lemma” para linguagens livres de contexto, que a linguagem deste exemplo não é livre de contexto. Tal resultado sugere, como será mostrado mais adiante, que as Máquinas de Turing com fita limitada são dispositivos capazes de reconhecer uma classe de linguagens mais ampla do que as livres de contexto, reconhecidas pelos autômatos de pilha — trata-se, no caso, da classe das linguagens sensíveis ao contexto.

Máquinas de Turing com Fita Limitada $\Rightarrow$ GSC

Teorema 4.1 “Seja $L = L(M), M$ uma Máquina de Turing com fita limitada. Então $L - \{\varepsilon\} = L(G)$, com G sendo uma gramática sensível ao contexto.”

A idéia geral desta demonstração consiste na obtenção de uma gramática sensível ao contexto que reproduz, na derivação de suas sentenças, os movimentos de uma Máquina de Turing com fita limitada que reconhece a mesma linguagem. Se a cadeia de entrada conduz o autômato a uma configuração final, sendo portanto aceita, esta mesma cadeia é gerada pela gramática. Cadeias rejeitadas pelo autômato não são geradas pela gramática.

GSC $\Rightarrow$ Máquina de Turing com Fita Limitada

Teorema 4.2 "Seja $L = (G)$, com G uma gramática sensível ao contexto. Então $L = L(M)$, sendo M uma Máquina de Turing com fita limitada."

Assim como foi feito no Teorema 4.1, será apresentado como prova deste teorema um algoritmo que permite efetuar um mapeamento direto entre G e sua correspondente Máquina de Turing com fita limitada.

Livres de contexto $\subseteq$ sensíveis ao contexto

Teorema 5.1 “Toda linguagem livre de contexto L é também uma linguagem sensível ao contexto.”

Se L é livre de contexto, então existe pelo menos uma gramática livre de contexto G que gera L. Se $\varepsilon \notin L$ então, de acordo com resultados anteriores, é possível obter uma gramática livre de contexto G', isenta de produções vazias, tal que $L'(G') = L$. Se $\varepsilon \in L$ então é possível obter uma gramática livre de contexto G', isenta de produções vazias, tal que $L'(G') = L - \{\varepsilon\}$. Como, pela definição, toda gramática livre de contexto satisfaz aos critérios formulados para as gramáticas sensíveis ao contexto (exceto pelas regras vazias), pode-se concluir que toda linguagem livre de contexto é também uma linguagem sensível ao contexto.

Exemplo

Exemplo 5.1

Seja $G_1 = (\{a,b,S\},\{S\},\{S \to aSb \mid ab\},S)$, com $L_1(G_1) = \{a^n b^n, n \geqslant 1\}$. Como $\varepsilon \notin L_1(G_1)$ e G_1 é uma gramática livre de contexto isenta de regras vazias, então G_1 é também uma gramática sensível ao contexto e L_1 é uma linguagem sensível ao contexto.

Exemplo

Exemplo 5.2

Seja $G_2 = (\{a,b,S\},\{S\},\{S \to aSb \mid \varepsilon\},S)$, com $L_2(G_2) = \{a^n b^n, n \geqslant 0\}$. Como G_2 contém a regra $S \to \varepsilon$, isso implica que G_2, apesar de ser uma gramática livre de contexto, não é uma gramática sensível ao contexto. Por outro lado, $L_2 - \{\varepsilon\}$ é gerada pela gramática $G_2' = (\{a,b,S\},\{S\},\{S \to aSb \mid ab\},S)$, que é livre de contexto e também sensível ao contexto. Logo, L_2 é uma linguagem sensível ao contexto.

Exemplo

Exemplo 5.3
Seja $G_3 = (\{a,b,S,X\},\{S,X\},\{S \to aSb \mid aXb, X \to ab \mid \varepsilon\},S)$, com $L_3(G_3) = \{a^n b^n, n \geqslant 1\}$. Como G_3 contém a regra $X \to \varepsilon$, isso implica que G_3, apesar de ser uma gramática livre de contexto, não é uma gramática sensível ao contexto. Não obstante, L_3 é gerada também pela gramática $G_3' = (\{a,b,S\},\{S\},\{S \to aSb \mid ab\},S)$, isenta de regras vazias, que é livre de contexto e também sensível ao contexto. Logo, L_3 é uma linguagem sensível ao contexto.

Exemplo

Exemplo 5.4
Seja $G_4 = (\{a,b,S,X\},\{S,X\},\{S \to aSb \mid X, X \to ab \mid \varepsilon\},S)$, com $L_4(G_4) = \{a^n b^n, n \geqslant 0\}$. Como G_4 contém a regra $X \to \varepsilon$, isso implica que G_4 não é uma gramática sensível ao contexto. Não obstante, a regra $X \to \varepsilon$ pode ser eliminada, dando origem à gramática $G_4' = (\{a,b,S,X\},\{S,X\},\{S \to aSb \mid X \mid \varepsilon, X \to ab\},S)$, em que a única regra vazia é $S \to \varepsilon$. Finalmente, $L_4 - \{\varepsilon\}$ é gerada pela gramática $G_4' = (\{a,b,S,X\},\{S,X\},\{S \to aSb \mid X, X \to ab\},S)$, que é simultaneamente livre de contexto e sensível ao contexto. Logo, L_4 é uma linguagem sensível ao contexto.

Livres de contexto $\neq$ sensíveis ao contexto

Teorema 5.2 "A classe das linguagens livres de contexto constitui subconjunto próprio da classe das linguagens sensíveis ao contexto." Através da aplicação do "Pumping Lemma" para linguagens livres de contexto é possível provar que diversas linguagens não são livres de contexto. Entre estas, pode-se citar a linguagem $\{a^n b^n c^n \mid n \geqslant 1\}$, a qual, no entanto, pode ser representada através de uma gramática sensível ao contexto (ver Exemplo 1.1). Logo, trata-se de uma linguagem sensível ao contexto, não-livre de contexto, e sua simples existência demonstra o teorema.

Gramáticas sensíveis ao contexto $\Rightarrow$ enumerável

Teorema 6.1 “O conjunto das gramáticas sensíveis ao contexto sobre um certo alfabeto Σ é enumerável.”

Considere-se um alfabeto Σ qualquer e todas as gramáticas sensíveis ao contexto que podem ser criadas a partir do mesmo. Seja $G = \{G_1, G_2, G_3, ...G_n, ...\}$ o conjunto infinito que reúne todas essas gramáticas.

Sem perda de generalidade, pode-se considerar que os símbolos não-terminais de cada uma dessas gramáticas pertencem ao conjunto infinito $A = \{A_1, A_2, A_3, ...A_n, ...\}$ e, além disso, que a raiz de cada uma delas é A_1. Ou seja, todas elas têm a mesma raiz e compartilham o mesmo conjunto de símbolos não-terminais.

Os elementos de G podem ser listados em uma ordem $G_1, G_2, G_3, ...$ (ou seja, enumerados) de acordo com o método descrito no Algoritmo 6.1.

Gramáticas sensíveis ao contexto $\Rightarrow$ enumerável

Algoritmo 6.1 *"Enumera todas as gramáticas sensíveis ao contexto."*

- *Entrada: um alfabeto Σ;*
- *Saída: uma enumeração de todas as gramáticas sensíveis ao contexto sobre Σ;*
- *Método:*
  1. *Inicialmente, listam-se todas as gramáticas cujas regras tenham o formato $\alpha \rightarrow \beta, |\alpha| = 1, |\beta| = 1$, e tais que apenas o não-terminal A_1 seja utilizado nas mesmas. Claramente, existe apenas um número finito de gramáticas nesta condição.*
  2. *A seguir, listam-se todas as gramáticas cujas regras tenham o formato $\alpha \rightarrow \beta, |\alpha| \leqslant 2, |\beta| \leqslant 2$, e tais que apenas os não-terminais A_1 e A_2 sejam utilizados nas mesmas. Novamente, o conjunto de gramáticas que satisfaz a esta condição é finito.*
  3. *Repete-se o passo (2) considerando $|\alpha| \leqslant 3, |\beta| \leqslant 3$ e os não-terminais A_1, A_2, A_3, e assim por diante.*

Gramáticas sensíveis ao contexto $\Rightarrow$ enumerável

Todas as gramáticas pertencentes a G serão inevitavelmente listadas (enumeradas) por este método, que gera uma seqüência infinita de conjuntos finitos, seqüência esta que pode ser ordenada na mesma seqüência dos números naturais $(1, 2, 3...)$. O conjunto das gramáticas sensíveis ao contexto é, portanto, um conjunto enumerável.

Linguagens não-sensíveis ao contexto

Teorema 6.2 "Existem linguagens que não são sensíveis ao contexto." Prova-se que existe pelo menos uma linguagem tal que não existe gramática sensível ao contexto que a gere.

Linguagens não-sensíveis ao contexto

Considere-se inicialmente o resultado do Teorema 6.1 (as gramáticas sensíveis ao contexto são enumeráveis) e um alfabeto Σ qualquer. Em seguida, pode-se considerar uma enumeração, em ordem lexicográfica crescente, das cadeias de Σ^+. Considere-se, em particular, $\Sigma = \{a, b\}$. Tal enumeração é correspondente à seqüência:

$$a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb, \ldots$$

Linguagens não-sensíveis ao contexto

Tendo enumerado os elementos de $G = \{G_1, G_2, ..., G_n, ...\}$ e de $\Sigma^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...\}$, passa-se agora a estabelecer uma função bijetora entre os dois conjuntos, de tal forma que os pares $(G_i, \alpha_i), i \geqslant 1$ sejam elementos dessa função (Tabela 1).

Linguagens não-sensíveis ao contexto

Tabela 1: Função bijetora entre gramáticas e cadeias sobre $\{a, b\}$

$$\begin{array}{cccccc} G_1 & G_2 & G_3 & \ldots & G_n & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_n & \ldots \end{array}$$

Defina-se agora a linguagem $L_R = \{\alpha_i \mid \alpha_i \notin L(G_i), \forall i \geqslant 1\}$. Em outras palavras, pertencem a L_R as cadeias α_i que não pertençam a $L(G_i)$. Tal verificação pode sempre ser feita para gramáticas sensíveis ao contexto, conforme demonstrado em teorema anterior sobre a equivalência deste tipo de gramáticas com as Máquinas de Turing com fita limitada (Teorema 4.2).

Linguagens não-sensíveis ao contexto

Só existem duas hipóteses acerca de L_R: ou trata-se de uma linguagem que é sensível ao contexto, ou então trata-se de uma linguagem que não é sensível ao contexto.
Considere-se que L_R seja uma linguagem sensível ao contexto. Se essa hipótese for verdadeira, deverá existir pelo menos uma gramática sensível ao contexto que a gere. Naturalmente, tal gramática deverá pertencer ao conjunto G. Seja G_i esta gramática. Se $L_R = L(G_i)$, então só existem duas possibilidades: α_i pertence ou não pertence a L_R.

- *Primeira possibilidade*: se $\alpha_i \notin L(G_i)$, então $\alpha_i \in L_R$, por hipótese, o que é uma contradição.
- *Segunda possibilidade*: se $\alpha_i \in L(G_i)$, então $\alpha_i \notin L_R$, por construção, o que também é uma contradição.

Logo, L_R não pode ser uma linguagem sensível ao contexto, e isso completa a demonstração.