Elementos de Matemática Discreta

Prof. Marcus Vinícius Midena Ramos

Universidade Federal do Vale do São Francisco

22 de setembro de 2023

marcus.ramos@univasf.edu.br
www.univasf.edu.br/~marcus.ramos

Bibliografia

1. *Linguagens Formais: Teoria, Modelagem e Implementação*
M.V.M. Ramos, J.J. Neto e I.S. Vega
Bookman, 2009

Roteiro

Conjunto

Um **conjunto** é uma coleção de elementos em que não são consideradas ocorrências múltiplas dos mesmos nem há relação de ordem entre eles.

Exemplo 1.1

A inclusão do elemento $\diamondsuit$ no conjunto $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ resulta no próprio conjunto $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$, pois o mesmo já faz parte do conjunto e, portanto, não deve ser considerado novamente. Por outro lado, o conjunto $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ é igual ao conjunto $\{\diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$, uma vez que não existe relação de ordem entre os elementos que os compõem.

Enumeração

Alguns conjuntos podem ser especificados através da simples **enumeração** de todos os seus elementos, denotados entre chaves e separados por vírgulas.

Exemplo 1.2

O conjunto formado pelos elementos $0,1,2,3$ é representado por $\{0,1,2,3\}$. O conjunto $\{a,b,c,d,e,f\}$ é formado pelas seis primeiras letras do alfabeto romano. O conjunto $\{01,231,33,21323\}$ contém os elementos $01,231,33$ e 21323.

Nomes

Conjuntos podem ser referenciados através de nomes, arbitrariamente escolhidos.

Exemplo 1.3
$X = \{0, 1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d, e, f\}$. Assim, os nomes X e Y passam a denotar os conjuntos correspondentes.

Número de elementos

O número de elementos contido em um conjunto A é denotado por $|A|$.

Exemplo 1.4
No exemplo 1.3, $|X| = 4$, $|Y| = 6$.

Pertencimento

Os símbolos $\in$ e $\notin$ servem para denotar se um determinado elemento **pertence** ou **não pertence** a um conjunto, respectivamente.

Exemplo 1.5

No exemplo 1.3, $0 \in X$, $5 \notin X$, $2 \notin Y$, $b \notin X$, $c \in Y$, $h \notin Y$.

Conjuntos finitos e infinitos

Conjuntos podem conter um número finito ou infinito de elementos. No primeiro caso, o conjunto pode ser denotado enumerando-se (relacionando-se explicitamente) todos os elementos que o compõem, como foi feito para os conjuntos X e Y do exemplo 1.3, que são **conjuntos finitos**.

Conjuntos infinitos

Conjuntos infinitos podem ser denotados através da especificação (formal ou informal) de regras ou propriedades que devem ser satisfeitas por todos os seus elementos, possibilitando assim a sua identificação precisa e completa a partir de uma especificação finita.

Exemplo 1.6
$P = \{x \mid x$ é um número primo$\}$, $Q = \{y \mid \exists n$ inteiro tal que $y = n^2\}$. O primeiro exemplo deve ser lido da seguinte forma: "P é o conjunto formado pelos elementos x, tal que x é um número primo". Em outras palavras, P é o conjunto, infinito, formado por todos os números primos: $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17...\}$. O conjunto Q, também infinito, é formado por todos os números que correspondem ao quadrado de algum número inteiro: $\{0, 1, 4, 9, 16...\}$.

Regras

Quando um conjunto é especificado a partir de regras, o símbolo "$|$" deve ser lido como "tal que", e serve para introduzir as condições que devem ser satisfeitas pelos membros do conjunto, que assim tornam-se conhecidos.

Conjunto vazio

O conjunto que não contém nenhum elemento recebe o nome de **conjunto vazio**. Por definição, $|\emptyset| = 0$. O conjunto vazio é denotado por $\emptyset$ ou ainda pelo símbolo $\{\}$. Assim, $\{\} = \emptyset$.

Igualdade

Dois conjuntos são ditos **idênticos**, ou simplesmente **iguais**, se eles contêm exatamente os mesmos elementos. A igualdade de dois conjuntos é denotada através do símbolo "$=$".

Exemplo 1.7
Considere $Z = \{a, b\}$ e $W = \{b, a\}$. Então, $Z = W$.

Subconjunto

Um conjunto A é dito "**contido** em um conjunto B", condição esta denotada através do símbolo "$\subseteq$", se todo elemento de A for também elemento de B. Neste caso diz-se, equivalentemente, que "A é um **subconjunto** de B" ou, ainda, que "B **contém** A". Os conjuntos $\emptyset$ e A são, por definição, subconjuntos de qualquer conjunto A.

Exemplo 1.8

Para os conjuntos $A = \{b,c,d\}$, $B = \{a,b,c,d,e\}$ e $C = \{e,a,d,b,c\}$ tem-se que $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$. Portanto, pode-se dizer que A está contido em B e em C, que A é subconjunto de B e de C, que C contém A e B e, ainda, que B e C são subconjuntos um do outro ou que estão contidos um no outro. B e C, por outro lado, não estão contidos em A.

Desigualdade

Dois conjuntos M e N são iguais se e somente se $M \subseteq N$ e $N \subseteq M$, e tal igualdade é denotada por $M = N$. A **desigualdade** de dois conjuntos é expressa através do símbolo "$\neq$", ocorrendo portanto quando no máximo apenas uma das duas condições $M \subseteq N$ e $N \subseteq M$ for verdadeira.

Exemplo 1.9

No exemplo 1.8, $A \subseteq B$, porém $A \neq B$. Como $B \subseteq C$ e $C \subseteq B$, então $B = C$.

Subconjunto próprio

Se $M \subseteq N$ e $M \neq N$, diz-se que M é um **subconjunto próprio** de N. O símbolo $\subset$ denota essa condição: $M \subset N$. O conjunto $\emptyset$ é subconjunto próprio de qualquer conjunto, exceto do próprio conjunto $\emptyset$.

Exemplo 1.10
No exemplo 1.8, A é subconjunto próprio de B, porém B não é subconjunto próprio de C. Logo, $A \subset B$.

Conjunto potência

Conjunto potência (“**powerset**”): Denotado por 2^A, onde A é um conjunto. Essa operação é utilizada para designar o conjunto formado por todos os possíveis subconjuntos de A:

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$$

Para conjuntos A finitos, $|2^A| = 2^{|A|}$.

Exemplo 1.11

Para $A = \{0,1,2\}$, temos $2^A = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$.
Além disso, $|A| = 3$ e $|2^A| = 2^3 = 8$.

União

União: A união de dois conjuntos A e B corresponde ao conjunto formado por todos os elementos contidos em cada um dos dois conjuntos A e B. Elementos repetidos em ambos os conjuntos são considerados uma única vez no conjunto união:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Trata-se de uma operação associativa, ou seja, uma operação para a qual vale a propriedade:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

União

A generalização da operação de união é denotada da seguinte forma:

$$\bigcup_{i=0}^{n} A_i = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

A operação de união é também comutativa, ou seja

$$A \cup B = B \cup A$$

para quaisquer conjuntos A e B. O conjunto vazio $\emptyset$ é o elemento neutro da operação de união.

Exemplo 1.12
$\{a,b\} \cup \{c,d\} = \{a,b,c,d\}$
$\{a,b,c\} \cup \{c,d\} = \{a,b,c,d\}$
$\{a,b,c,d\} \cup \emptyset = \{a,b,c,d\}$

Intersecção

Intersecção: Define-se a intersecção de dois conjuntos A e B como sendo a coleção de todos os elementos comuns aos dois conjuntos:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Também em decorrência da associatividade desta operação, a sua generalização é denotada de forma similar ao caso da união:

$$\bigcap_{i=0}^{n} A_i = A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

Intersecção

Da mesma forma que a união, a operação de intersecção é também comutativa

$$A \cap B = B \cap A$$

para quaisquer conjuntos A e B. A intersecção de qualquer conjunto com o conjunto vazio produz como resultado o próprio conjunto vazio.

Exemplo 1.13

$\{a,b,c\} \cap \{c,d\} = \{c\}$
$\{a,b,c,d\} \cap \{c,d\} = \{c,d\}$
$\{a,b\} \cap \{c,d\} = \emptyset$
$\{a,b,c,d\} \cap \emptyset = \emptyset$

Conjuntos disjuntos

Dois conjuntos A e B são ditos **disjuntos** se $A \cap B = \emptyset$.

Exemplo 1.14

Os conjuntos $\{a,b,c\}$ e $\{c,d\}$ não são disjuntos, pois $\{a,b,c\} \cap \{c,d\} = \{c\} \neq \{\}$.
Os conjuntos $\{a,b\}$ e $\{c,d\}$ são disjuntos, pois $\{a,b\} \cap \{c,d\} = \emptyset$.

Diferença

Diferença: Define-se a diferença entre dois conjuntos A e B (nesta ordem) como sendo o conjunto formado por todos os elementos de A não-pertencentes ao conjunto B. Denota-se este conjunto como:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Exemplo 1.15

$\{a,b,c\} - \{c,d\} = \{a,b\}$
$\{a,b\} - \{a,b,c\} = \emptyset$
$\{a,b,c\} - \{d,e\} = \{a,b,c\}$
$\{c,d\} - \{a,b,c\} = \{d\}$
$\{a,b,c\} - \{a,b\} = \{c\}$
$\{d,e\} - \{a,b,c\} = \{d,e\}$

Complementação

Complementação: Define-se a complementação de um conjunto A em relação ao conjunto B, $A \subseteq B$, como sendo o conjunto de todos os elementos de B que não pertencem a A. Denota-se este conjunto como:

$$\overline{A}_B = B - A$$

Muitas vezes esta operação é definida para um conjunto A em relação a um outro conjunto B subentendido e, neste caso, escreve-se simplesmente:

$$\overline{A} = B - A$$

Complementação

Diz-se, neste caso, que o conjunto subentendido é o conjunto universo da operação. O resultado da operação é conhecido simplesmente como **complemento** de A.

Exemplo 1.16
Sejam $A = \{a,b,c\}$, $B = \{a,b,c,d\}$ e $C = \{d,c,a,b\}$. Então, $\overline{A}_B = \{d\}$ e $\overline{B}_C = \emptyset$.
Sendo $D = \{a,b,c,d,e\}$ o conjunto universo, $\overline{A} = \{d,e\}, \overline{B} = \overline{C} = \{e\}$ e $\overline{D} = \emptyset$.

Produto cartesiano

Produto cartesiano: O produto cartesiano de dois conjuntos é o conjunto formado por todos os pares ordenados (a, b), em que a é um elemento de A, e b um elemento de B:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Par ordenado

Um **par ordenado** é uma representação de dois elementos separados por vírgula e delimitados por parênteses, como em (a,b). Tal representação implica uma relação de ordem em que o elemento a é anterior ao elemento b. Conseqüentemente, se $a \neq b$, então $(a,b) \neq (b,a)$.

Se A e B são conjuntos finitos, então $|A \times B| = |A| * |B|$.

A generalização desta operação é denotada:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_i \in A_i \text{ para } 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

Par ordenado

Exemplo 1.17
Sejam $A = \{a,b,c\}$ e $B = \{0,1\}$. Então $A \times B =$

$$\{(a,0),(a,1),(b,0),(b,1),(c,0),(c,1)\}$$

e

$$|A \times B| = |A| * |B| = 3 * 2 = 6$$

Partição

Partição: Define-se partição de um conjunto A como sendo qualquer coleção formada por n subconjuntos não-vazios de A, $n \geqslant 1$, tal que:

$$A = \bigcup_{i=0}^{n} A_i \quad \text{e} \quad \bigcup_{i=0}^{n} \left(\bigcup_{j=0}^{n, j \neq i} A_i \cap A_j \right) = \emptyset$$

Exemplo 1.18
Seja $A = \{a, b, c, d\}$. Então, $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ é uma partição de A. Da mesma forma, o conjunto $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$, bem como $\{\{a, b, c, d\}\}$, entre vários outros.

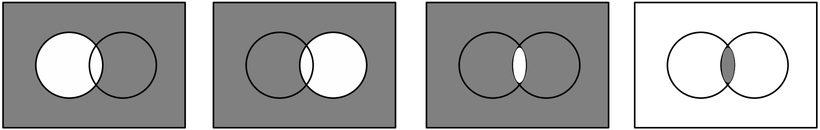
Leis de De Morgan

Teorema 1.1 “Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Então $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$ e $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$.”

Estas propriedades podem ser inferidas, respectivamente, pela inspeção dos diagramas das Figuras 1 e 2.

Leis de De Morgan

Na Figura 1, da esquerda para a direita, as áreas hachuradas dos diagramas representam, respectivamente, $\overline{A}, \overline{B}, \overline{A} \cup \overline{B}$ e $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$.



$\overline{\mathrm{A}}$ $\quad$ $\overline{\mathrm{B}}$ $\quad$ $\overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}$ $\quad$ $\overline{\overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}}$

Figura 1: Demonstração da Lei de De Morgan para intersecção de conjuntos

Leis de De Morgan

Na Figura 2, da esquerda para a direita, as áreas hachuradas dos diagramas representam, respectivamente, $\overline{A}, \overline{B}, \overline{A} \cap \overline{B}$ e $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$.

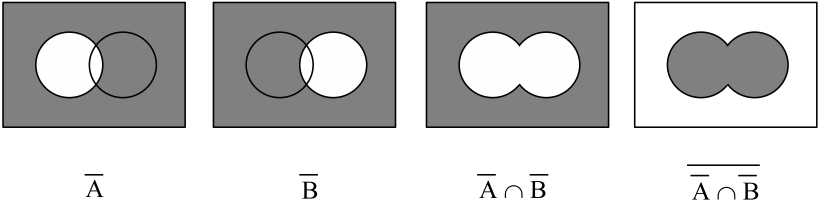


Figura 2: Demonstração da Lei de De Morgan para união de conjuntos

Igualdade de conjuntos

Teorema 1.2 "Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Então $A = B \Leftrightarrow (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = \emptyset$."

($\Rightarrow$) Se $A = B$, então $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cap \overline{A}) \cup (\overline{A} \cap A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.
($\Leftarrow$) Se $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = \emptyset$, então as duas seguintes condições devem ser simultaneamente satisfeitas:

1. $(A \cap \overline{B}) = \emptyset$;
2. $(\overline{A} \cap B) = \emptyset$.

Igualdade de conjuntos

Considere-se $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$, de forma que $\overline{A} = \overline{A}_C$ e $\overline{B} = \overline{B}_C$. Então, existem apenas três possibilidades para representar a relação entre A e B:

- i $A \neq B$ e $A \cap B \neq \emptyset$. Logo, $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$;
- ii $A \neq B$ e $A \cap B = \emptyset$. Logo, $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$;
- iii $A = B$. Logo, $A \cap \overline{B} = \emptyset$.

Igualdade de conjuntos

Portanto, a única relação possível entre A e B que satisfaz à condição (1) é a relação (iii). Da mesma forma, pode-se facilmente mostrar que (iii) também é a única relação que satisfaz à condição (2), e isso completa a demonstração do teorema.
A menos de ressalva em contrário, ao longo deste texto os nomes de conjuntos serão representados por intermédio das letras maiúsculas do alfabeto romano (A, B, X, Y etc.). Elementos de um conjunto são usualmente denotados através das letras minúsculas do mesmo alfabeto (a, b, c etc.).

Conjuntos mais comuns

- $\mathbb{N}$, representando os números naturais $\{0, 1, 2, 3, ...\}$;
- $\mathbb{Z}$, representando os números inteiros $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$;
- $\mathbb{Z}_+$, representando os números inteiros positivos $\{1, 2, 3, ...\}$;
- $\mathbb{Z}_-$, representando os números inteiros negativos $\{..., -3, -2, -1\}$;
- $\mathbb{R}$, representando os números reais.

Definição

Uma **relação** R sobre dois conjuntos A e B é definida como um subconjunto de $A \times B$.

Relações representam abstrações de conceitos matemáticos fundamentais, como, por exemplo, as operações aritméticas, lógicas e relacionais, além de constituírem a base teórica para o estudo sistemático das funções. O conjunto de todas as relações definíveis sobre $A \times B$ é dado por $2^{A \times B}$.

Exemplo 2.1

A relação $R_1 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{N} \text{ e } a > b\}$, sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, contém, entre infinitos outros, os elementos $(2,1),(7,4)$ e $(9,3)$. A relação $R_2 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{Z}$ e $x^2 = y^2 + z^2\}$, sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, contém os elementos $(0,0,0)$, $(2,2,0)$, $(2,0,-2)$, $(5,4,3)$, $(-10,8,-6)$ etc.

Domínio e contradomínio

Uma relação R aplicada sobre um elemento a de um conjunto A e outro elemento b de um conjunto B pode ser denotada, em notação infixa, por aRb. Se $(a,b) \in R$, diz-se, de forma abreviada, que aRb. Os conjuntos A e B recebem, respectivamente, os nomes **domínio** e **co-domínio** (ou **contradomínio**) da relação R. Por envolver dois conjuntos, essa relação é dita **binária** e seus elementos recebem a designação de **pares ordenados**. Relações binárias sobre um mesmo conjunto A representam subconjuntos de $A \times A$.

Domínio e contradomínio

Exemplo 2.2
Considere-se a relação binária “$\neq$” sobre o conjunto dos números inteiros. Essa relação se define como o conjunto dos pares ordenados tais que suas duas componentes são diferentes. Alguns dos elementos do conjunto definido por essa relação são $(1,3),(-5,0),(8,-2)$ etc. Utilizando a notação introduzida, os elementos citados, pertencentes a essa relação, são denotados por $1 \neq 3$, $-5 \neq 0$ e $8 \neq -2$, coincidindo, portanto, com a representação tradicional da relação.
Notar que $(1,1),(0,0)$ e $(-5,-5)$ são exemplos de pares ordenados que não satisfazem a essa relação binária, pois suas duas componentes coincidem.

Ênuplas ordenadas

O conceito de relação pode ser generalizado para mais de dois conjuntos, consistindo, sempre, em subconjuntos definidos sobre o produto cartesiano dos conjuntos participantes da relação. A relação, nesse caso, é dita uma relação "n-ária", e corresponde a um subconjunto do produto cartesiano dos conjuntos envolvidos. Sejam n conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$. Os elementos pertencentes ao conjunto definido por uma relação n-ária sobre $A_1, A_2, ..., A_n$ são, portanto, elementos de $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$, e têm a seguinte forma:

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$$

onde $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n$.

Ênuplas ordenadas

Tais elementos são denominados **ênuplas ordenadas.** Em casos particulares, como para $n = 2, 3, 4, 5$ etc., as ênuplas recebem nomes especiais, geralmente os ordinais de n: pares, triplas, quádruplas, quíntuplas etc. Quando n é grande, usa-se em geral o nome "n-tupla ordenada". Por exemplo, $(a_1, a_2, ..., a_{10})$ é considerada uma décupla (ou uma 10-tupla) ordenada.

Reflexiva, simétrica e transitiva

Uma relação binária R sobre um conjunto A é dita:

- **Reflexiva**: se $aRa, \forall a \in A$;
- **Simétrica**: se aRb implica $bRa, \forall a, b \in A$;
- **Transitiva**: se aRb e bRc implicam $aRc, \forall a, b, c \in A$;

sendo que a, b, c não precisam ser necessariamente distintos.

Exemplo 2.3
A relação binária "identidade" (=) definida sobre o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ como o conjunto de todos os pares ordenados para os quais as duas componentes são idênticas. Ela é reflexiva, pois $a = a, \forall a \in \mathbb{Z}$; é simétrica, pois $a = b$ implica $b = a, \forall a, b \in \mathbb{Z}$; e transitiva, uma vez que $a = b$ e $b = c$ implica $a = c, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$. Alguns elementos do conjunto definido por essa relação são $(4,4), (0,0), (-7,-7)$ etc. Notar que pares ordenados, tais como $(1,-3), (0,5)$ e $(7,9)$, não pertencem a essa relação.

Reflexiva, simétrica e transitiva

Por outro lado, a relação binária “maior” (>), definida como o conjunto dos pares ordenados cujas primeiras componentes tenham valor maior que as segundas componentes, aplicada sobre o mesmo conjunto $\mathbb{Z}$, revela-se não-reflexiva, pois não é verdade que $a > a, \forall a \in \mathbb{Z}$; não-simétrica, já que $a > b$ não implica $b > a, \forall a$ e $b \in \mathbb{Z}$; porém ela é transitiva, uma vez que $a > b$ e $b > c$ implica $a > c, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Relação de equivalência

Uma relação que seja simultaneamente reflexiva, simétrica e transitiva é denominada relação de equivalência. Se R é uma **relação de equivalência** sobre um conjunto A, então R estabelece uma partição do conjunto A.

Suponha-se que R seja uma relação binária sobre A, e $A_i, i \geqslant 0$, uma partição de A induzida por R. Então, valem as seguintes propriedades:

- Se $(a,b) \in R$, então $a \in A_i, b \in A_j$ e $i = j$;
- Se $(a,b) \notin R$, então $a \in A_i, b \in A_j$ e $i \neq j$.

Relação de equivalência

Exemplo 2.4

Considere-se o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros e a relação binária:

$$\begin{array}{lcl} Q & : & \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a^2 = b^2\} \\ Q & = & \{(0,0),(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)...(n,n),(n,-n),(-n,n),(-n,-n)...\} \end{array}$$

Q é uma relação de equivalência e induz à partição $\{A_0, A_1, ...\}$ de $\mathbb{Z}$, onde:

$$\begin{array}{lcl} A_0 & = & \{0\} \\ A_1 & = & \{1,-1\} \\ A_2 & = & \{2,-2\} \\ & ... & \\ A_n & = & \{n,-n\} \\ & ... & \end{array}$$

Quaisquer que sejam os números $a, b \in \mathbb{Z}$ considerados, se $(a,b) \in Q$, então a e b pertencem necessariamente ao mesmo conjunto A_i, para algum valor de $i \geqslant 0$. Se $(a,b) \notin Q$, a e b pertencerão sempre a conjuntos distintos desta partição de $\mathbb{Z}$.

Conjunto fechado em relação à uma operação

Diz-se que um conjunto é **fechado em relação a uma operação** se da aplicação dessa operação a quaisquer membros desse conjunto resultarem sempre elementos que também são membros do mesmo conjunto.

Exemplo 2.5
Considere-se o conjunto $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$ e a operação unária $\sqrt{}$ (raiz quadrada). Qualquer que seja o elemento $x \in X$ considerado, $\sqrt{x}$ é sempre um elemento de X. Portanto, o conjunto X é fechado em relação à operação $\sqrt{}$.
Por outro lado, não se pode dizer o mesmo do conjunto $\mathbb{R}$, uma vez que a operação raiz quadrada não é definida para números negativos. Logo, o conjunto $\mathbb{R}$ não é fechado em relação à operação $\sqrt{}$.

Conjunto fechado em relação à uma operação

Exemplo 2.6
Considerem-se os conjuntos dos números inteiros $\mathbb{Z}$, dos números naturais $\mathbb{N}$ e as operações binárias de soma e subtração. Então, as seguintes afirmativas são verdadeiras:

- O conjunto $\mathbb{Z}$ é fechado em relação à operação de soma. De fato, da soma de quaisquer dois elementos de $\mathbb{Z}$ resulta sempre um elemento que também pertence ao conjunto $\mathbb{Z}$;
- O conjunto $\mathbb{Z}$ é fechado em relação à operação de subtração, pois da subtração de quaisquer dois elementos de $\mathbb{Z}$ resulta sempre um elemento que também pertence ao conjunto $\mathbb{Z}$;
- O conjunto $\mathbb{N}$ não é fechado em relação à operação de subtração: nem toda subtração de dois elementos arbitrários de $\mathbb{N}$ fornece como resultado um elemento que também pertença ao conjunto $\mathbb{N}$; Assim, por exemplo, se $1 \in \mathbb{N}$ e $2 \in \mathbb{N}$, $2 - 1 = 1 \in \mathbb{N}$, mas $1 - 2 = -1 \notin \mathbb{N}$;
- O conjunto $\mathbb{N}$ é fechado em relação à operação de soma.

Definição

Uma **função** é um mapeamento que associa elementos de um conjunto denominado **domínio** a elementos de um outro conjunto, chamado **co-domínio** ou **contradomínio**. Essa associação deve ser tal que cada elemento do domínio esteja associado a no máximo um elemento do conjunto co-domínio.
Formalmente, uma função entre um conjunto A (domínio) e um conjunto B (co-domínio) é definida como uma relação R entre esses conjuntos, de modo que:

$$\forall (a,b),(a,c) \in R, b = c$$

Toda função é uma relação, mas nem toda relação é uma função.
Denota-se uma função f entre dois conjuntos X e Y por:

$$f : X \to Y$$

Exemplo

Exemplo 3.1

Considere-se f_1 e f_2 definidas abaixo:

$$\begin{array}{rcl} f_1 & = & \{(1,5),(2,3),(4,5),(8,1),(7,3)\} \\ f_2 & = & \{(6,7),(9,0),(6,3),(4,3),(3,1)\} \end{array}$$

A relação f_1 é aderente à definição de função, ao passo que f_2 é uma relação mas não uma função, devido à presença simultânea dos pares $(6,7)$ e $(6,3)$, que associam o mesmo elemento 6 do domínio a dois elementos distintos do co-domínio (7 e 3). As Figuras 3 e 4 ilustram, respectivamente, as relações f_1 e f_2.

Exemplo

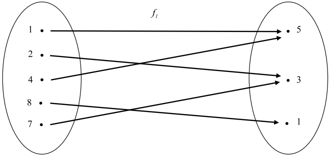


Figura 3: Relação que é também função

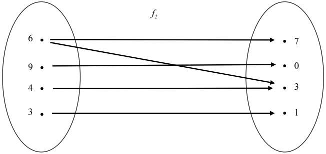


Figura 4: Relação que não é função

Associação

A associação estabelecida pela função f entre um elemento x do conjunto domínio X com um elemento y do conjunto co-domínio Y é denotada por:

$$f(x) = y$$

De maneira equivalente, diz-se que $(x, y) \in f$.

Conjunto imagem

O **conjunto imagem** de f, denotado por I_f, é o conjunto formado por todos os elementos do co-domínio Y que estejam em correspondência com elementos de X, ou seja, $I_f \subseteq Y$. Formalmente,

$$I_f = \{y \in Y \mid y = f(x)\}$$

Argumentos

O elemento x é denominado **argumento** da função f, e y é denominado **imagem** de x pela **aplicação** de f. Funções com múltiplos argumentos são definidas como um mapeamento em que o conjunto domínio corresponde ao produto cartesiano de múltiplos conjuntos:

$$f : X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \rightarrow Y$$

Funções com um, dois ou três argumentos são respectivamente denominadas funções unárias, binárias ou ternárias, e assim por diante.

Diz-se também que uma função que associa pares ordenados sobre um conjunto X, ou seja, elementos de X^2 com elementos do próprio conjunto X, é uma **função (operação) binária** sobre X.

Exemplos

Exemplo 3.2

Considere $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f_1 = \{y \in \mathbb{N} \mid y = x^3, x \in \mathbb{N}\}$. A função f_1 é unária, pois associa cada elemento de $\mathbb{N}$ ao seu cubo. Portanto, $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Alguns dos infinitos elementos do conjunto definido por f_1 são: $(1,1),(2,8),(3,27)$ etc. Denota-se $f_1(2) = 8$, ou ainda $(2,8) \in f_1$.

Exemplo 3.3

Seja $f_2 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f_2 = \{z \in \mathbb{Z} \mid z = x + y; x, y \in \mathbb{Z}\}$. A função binária f_2 define a operação (função) de adição sobre o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, sendo elementos de $f_2 : ((1,2),3),((-3,7),4),((0,5),5)$ etc. Escreve-se $f_2(-3,7) = 4$, ou ainda $((-3,7),4) \in f_2$.

Função total

Uma função se diz uma **função total** (denotada pelo símbolo “$\rightarrow$”) quando especifica associações para todos os elementos do conjunto domínio, sem exceção. Formalmente:

$$\forall x \in X, \exists y \in Y \mid y = f(x)$$

Exemplo 3.4
A Figura 5 ilustra o conceito de função total.

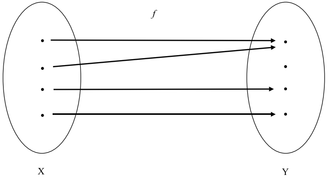


Figura 5: Função total

Exemplo

Exemplo 3.5

Sejam $X = \{0, 1, 2\}$ e $Y = \{a, b, c\}$, respectivamente, o conjunto domínio e o conjunto co-domínio da função $f_1 = \{(0, a), (1, b), (2, a)\}$. A função $f_1 : X \to Y$ é total, pois todos os elementos do conjunto domínio estão em correspondência com algum elemento do conjunto co-domínio. Neste caso, o conjunto imagem de f_1 é $\{a, b\}$.

Função parcial

Quando uma função não é definida para todos os elementos de seu domínio, ela recebe a denominação de **função parcial** (denotada pelo símbolo "$\nrightarrow$"). Formalmente:

$$\exists x \in X \mid f(x) \text{ não é definida}$$

Exemplo 3.6

A Figura 6 ilustra o conceito de função parcial.

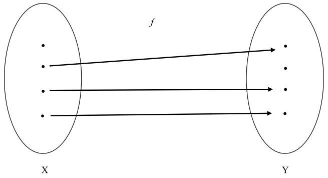


Figura 6: Função parcial

Exemplo

Exemplo 3.7
Seja $X = \{0,1,2\}, Y = \{a,b,c\}$ e $f_2 = \{(0,b),(2,b)\}$. A função $f_2 : X \nrightarrow Y$ é parcial, pois não há associação do elemento "1" pertencente ao conjunto domínio a qualquer elemento do conjunto co-domínio. O conjunto imagem para essa função é $\{b\}$.

Função injetora

Diz-se que uma função é **um-para-um**, ou simplesmente uma função **injetora**, quando elementos distintos do domínio X estiverem associados a elementos distintos do co-domínio Y, ou seja, quando não houver quaisquer dois elementos distintos do conjunto domínio associados ao mesmo elemento do conjunto imagem:

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

De maneira equivalente, uma função é dita **injetora** se cada elemento do conjunto co-domínio estiver associado a, no máximo, um elemento do conjunto domínio.
As Figuras 5 e 6 representam funções que são, respectivamente, não-injetora e injetora.

Exemplo

Exemplo 3.8

Seja $X = \{0,1,2\}, Y = \{a,b,c\}$ e $f_3 = \{(0,c),(1,b)\}$. A função $f_3 : X \to Y$ é injetora, pois não existe um mesmo elemento de Y associado a mais de um elemento de X. Por outro lado, a função f_2, definida no Exemplo 3.7, é parcial mas não injetora, pois o elemento b de seu conjunto imagem está simultaneamente associado aos elementos 0 e 2 do conjunto domínio.

Função sobrejetora

Uma função f é dita **sobrejetora** se todos os elementos do conjunto co-domínio estiverem associados a elementos do conjunto domínio, ou seja, se I_f, o conjunto imagem de f, for igual ao conjunto co-domínio de f:

$$\forall y \in Y, \exists x \in X \mid y = f(x)$$

Exemplo 3.9

As funções das Figuras 5 e 6 não são sobrejetoras. A Figura 7 ilustra uma função sobrejetora.

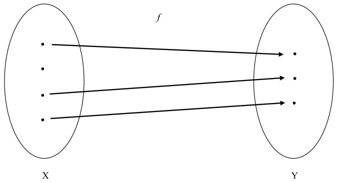


Figura 7: Função sobrejetora

Exemplo

Exemplo 3.10

Seja $X = \{0,1,2\}, Y = \{a,b,c\}$ e $f_4 = \{(0,c),(1,b),(2,a)\}$. A função $f_4 : X \to Y$ é sobrejetora, pois $Y = I_f = \{a,b,c\}$. Em adição, pode-se observar que f_4 é simultaneamente uma função total, injetora e sobrejetora, e também que as funções f_1 (Exemplo 3.5), f_2 (Exemplo 3.7) e f_3 (Exemplo 3.8) anteriormente definidas não são sobrejetoras.

Função bijetora

Uma função que seja simultaneamente total, injetora e sobrejetora recebe a denominação de função **bijetora**.

Exemplo 3.11
As funções das Figuras 5, 6 e 7 não são bijetoras. Em particular, a da Figura 5 é total, não-injetora e não-sobrejetora; a da Figura 6 é parcial, injetora e não-sobrejetora; e a da Figura 7 é parcial, injetora e sobrejetora. A Figura 8 ilustra uma função bijetora.

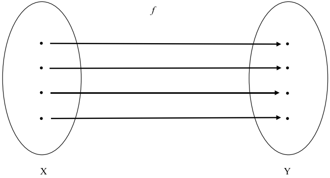


Figura 8: Função bijetora

Exemplo

Exemplo 3.12

Seja $f_5 = \{(0,a),(1,b),(2,c)\}$. A função $f_5 : X \rightarrow Y$, assim como a função f_4 definida no Exemplo 3.10, é bijetora. As funções f_1 (Exemplo 3.5), f_2 (Exemplo 3.7) e f_3 (Exemplo 3.8) não são bijetoras.

Exemplo

Exemplo 3.13
Considerem-se as funções adição, sobre o conjunto dos números naturais, divisão, sobre o conjunto dos números reais, e raiz quadrada, sobre o conjunto dos números inteiros:

- $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Ela não é injetora, pois a soma de dois números naturais quaisquer pode corresponder à soma de outros números naturais distintos (por exemplo, ((3,4),7) e ((5,2),7)). É sobrejetora, pois todo número natural pode ser expresso como a soma de dois outros números naturais. É total, pois a cada par de números naturais sempre corresponde um outro número natural.

Exemplo

- $/ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Não é injetora, pois existem vários casos em que a divisão de dois números reais corresponde ao mesmo número real (por exemplo, os casos ((10.0,2.5),4.0) e ((20.0,5.0),4.0)). É sobrejetora, pois todos os números reais podem ser expressos como a divisão de dois outros números reais (por exemplo, todos os casos ((x,1.0),x)). Não é total, pois a divisão não é definida quando o denominador é zero (por exemplo, ((1,0),?)).
- $\sqrt{} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. É injetora, pois não é possível que dois números inteiros diferentes tenham a mesma raiz inteira ((4,2), (9,3) e (3,?)). Não é sobrejetora, pois nem todo número inteiro corresponde à raiz quadrada de algum outro número inteiro (por exemplo, (?,-3). Não é total, pois a operação raiz quadrada não é definida para números inteiros negativos (por exemplo, (-2,?)).

...

A Tabela 1 resume estes resultados:

Tabela 1: Propriedades das funções $+, /$ e $\sqrt{}$

	Injetora?	Sobrejetora?	Total?
$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$	Não	Sim	Sim
$/ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	Não	Sim	Não
$\sqrt{} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$	Sim	Não	Não

Cardinalidade

Quando se estudam os conjuntos, freqüentemente torna-se necessário compará-los entre si em relação à quantidade de elementos neles contidos, ou seja, à sua **cardinalidade.**

A cardinalidade de um conjunto é uma medida da quantidade de elementos contidos no mesmo, ou seja, da grandeza que intuitivamente é conhecida como “tamanho” do conjunto.

Cardinalidade de conjuntos finitos

Trata-se de um conceito de fácil compreensão quando referente a conjuntos finitos. Nesse caso, diz-se que dois conjuntos A e B têm a mesma cardinalidade se eles possuírem a mesma quantidade de elementos, ou seja, $|A| = |B|$. Se A possuir mais elementos que B, escreve-se $|A| > |B|$.
A cardinalidade de um conjunto finito é, portanto, simplesmente o número natural que informa a quantidade de elementos que compõem esse conjunto. Quando se trata de conjuntos finitos, tais resultados são intuitivos e, até certo ponto, óbvios. Por exemplo, se X for um subconjunto próprio de Y, então ter-se-á sempre $|X| < |Y|$.

Exemplo 4.1
Considerem-se os conjuntos finitos $A = \{a,b,c,d\}$ e $B = \{0,1,2,3,4,5\}$. Então, $|A| = 4, |B| = 6$ e $|A| < |B|$.

Cardinalidade de conjuntos infinitos

De que forma seria, por outro lado, possível comparar o "tamanho" de dois conjuntos infinitos? Assim como no caso dos conjuntos finitos, dois conjuntos infinitos também podem possuir a mesma cardinalidade, bastando para isso que seja possível identificar uma correspondência biunívoca entre os elementos de ambos os conjuntos.

Formalmente, diz-se que dois conjuntos A e B quaisquer, finitos ou infinitos, possuem a mesma cardinalidade, ou seja, $|A| = |B|$, se for possível definir entre eles uma função bijetora.

Exemplos

Exemplo 4.2

Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{7, 3, 6\}$. Neste exemplo, A e B possuem a mesma cardinalidade, pois $|A| = |B| = 3$. Note-se que é possível definir uma função bijetora de A para B: $\{(a, 7), (b, 3), (c, 6)\}$. Naturalmente, muitas outras funções bijetoras também podem ser definidas entre esses dois conjuntos.

Exemplo 4.3

Sejam $A = \{a \mid a \text{ é ímpar}, 1 \leqslant a \leqslant 100\}$ e $B = \{b \mid b \text{ é par}, 1 \leqslant b \leqslant 100\}$. A e B são conjuntos finitos que possuem a mesma cardinalidade, pois a função $f(a) = a + 1$ é bijetora, mapeando os elementos do conjunto A nos elementos do conjunto B. Neste caso, $|A| = |B| = 50$.

Exemplo

Exemplo 4.4

Considere-se o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ e o subconjunto de $\mathbb{Z}$ composto apenas pelos números ímpares. Trata-se, naturalmente, de dois conjuntos infinitos, sendo o segundo um subconjunto próprio do primeiro. Porém, de acordo com a definição, embora isso pareça paradoxal, os dois conjuntos possuem a mesma cardinalidade, já que a função bijetora $2 * i + 1$, onde $i \in \mathbb{Z}$, mapeia univocamente cada elemento de $\mathbb{Z}$ em um único elemento do conjunto dos números ímpares.

Do Exemplo 4.4 pode-se observar facilmente que, diferentemente do que ocorre com conjuntos finitos, é possível, para conjuntos infinitos, definir subconjuntos próprios com a mesma cardinalidade do conjunto original.

Cardinalidade relativa

Caso não seja possível identificar pelo menos uma função bijetora entre dois conjuntos A e B quaisquer, é ainda possível que se constate a existência de uma função total e injetora de A para B. Neste caso, diz-se que $|A| \leqslant |B|$. Se, além disso, for possível provar a inexistência de uma função bijetora de A para B, então $|A| < |B|$.

Conjuntos enumeráveis

Diz-se que um conjunto é **enumerável**, ou simplesmente **contável**, se ele possuir um número finito de elementos, ou então, no caso de ser infinito, se ele possuir a mesma cardinalidade que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Conjuntos infinitos X tais que $|X| \neq |\mathbb{N}|$ são ditos **não-enumeráveis** ou **não-contáveis**.

O conceito de conjuntos enumeráveis está diretamente relacionado ao conceito intuitivo de "seqüencialização" dos elementos de um conjunto, com o objetivo de permitir a sua contagem.

A seqüencialização é uma operação que visa estabelecer uma relação de ordem entre os elementos de um conjunto (efetuar a sua ordenação) para permitir a associação unívoca de cada um de seus elementos com os correspondentes elementos de $\mathbb{N}$.

Exemplo

Exemplo 4.5

O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é um exemplo de conjunto infinito enumerável. A ordenação apresentada na Tabela 2 ilustra uma seqüencialização que permite associar os elementos de $\mathbb{Z}$ com os de $\mathbb{N}$.

Tabela 2: Bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$	0	1	-1	2	-2	3	-3	...
$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	...

Essa associação também pode ser representada por meio da função:

$$f(n) = (-1)^{n+1} * \frac{n + (n \bmod 2)}{2}$$

Exemplo

Exemplo 4.6

O conjunto formado pelos pares ordenados $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ constitui um exemplo de conjunto infinito enumerável. Isso pode ser percebido com o auxílio da Tabela 3, em que um arranjo bidimensional permite visualizar a seqüencialização desses pares, de modo que seja possível estabelecer a sua associação com os elementos de $\mathbb{N}$.

Exemplo

Tabela 3: $\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ é um conjunto enumerável

(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	...
(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	...
(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	...
(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	...
(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	...
(5,0)	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Exemplo

Exemplo 4.7

O conjunto formado pelos pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, com $x > y$ também constitui um exemplo de conjunto infinito enumerável. Isso pode ser percebido com o auxílio da tabela anterior, porém considerando apenas a seqüencialização dos pares situados abaixo da diagnoal principal.

Exemplo

A associação com $\mathbb{N}$ pode ser feita imaginando-se uma linha que percorra todos os elementos desta matriz a partir do canto superior esquerdo, conforme a seqüência geométrica mostrada na Tabela 3. Desse modo, a seguinte seqüência de pares é obtida:

$$(1,0),(2,0),(3,0),(2,1),(3,1),(4,0),(5,0),(4,1),(3,2)...$$

Tal seqüência pode ser facilmente colocada em correspondência com os elementos de $\mathbb{N}$, conforme ilustrado na Tabela 4.

Tabela 4: Bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(2,1)	...
$\mathbb{N}$	0	1	2	3	...

Exemplo

Técnica semelhante pode ser usada para demonstrar que o conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e o conjunto dos números racionais também são enumeráveis. Neste último caso, em particular, basta considerar o elemento $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como uma representação da fração x/y (a fim de evitar o denominador zero, a primeira coluna do arranjo deve ser omitida).

Exemplo

Exemplo 4.8
O conjunto $\mathbb{R}$, composto pelos números reais, constitui um exemplo de conjunto infinito não-enumerável, uma vez que, como demonstrado a seguir, $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$. Para efetuar essa demonstração, será considerado o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}$:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$$

A prova de que $\mathbb{R}$ é não-enumerável é efetuada em dois passos: inicialmente demonstra-se que S possui a mesma cardinalidade que $\mathbb{R}$, e a seguir demonstra-se que S é um conjunto não-enumerável. O fato de que $|S| = |\mathbb{R}|$ pode ser constatado pela existência da função bijetora f, apresentada a seguir, a qual permite associar univocamente elementos de S com elementos de $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x} - 1, & 0 < x < 0,5 \\ \dfrac{1}{2(x-1)} + 1, & 0,5 \leqslant x < 1 \end{cases}$$

Exemplo

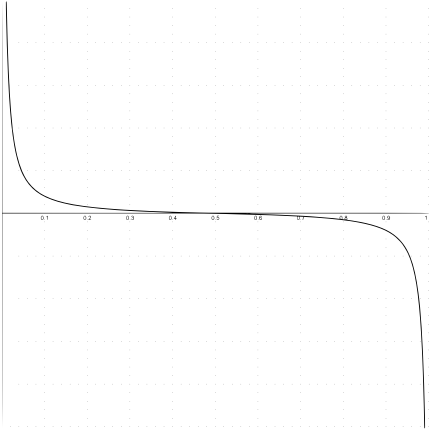


Figura 9: Mapeamento de S em $\mathbb{R}$

Exemplo

A prova de que S é um conjunto não-enumerável é feita por contradição, ou seja, mostrando-se que, qualquer que seja a seqüencialização proposta para os elementos de S, sempre será possível identificar um novo elemento de S que não pertence à seqüência apresentada. Desse modo, a hipótese original de que S é um conjunto enumerável deve ser considerada inválida.
Admita-se que exista uma seqüencialização de S de tal modo que seja possível associar cada elemento desse conjunto univocamente a elementos de $\mathbb{N}$. Assim, seria obtida uma associação do tipo ilustrado pela Tabela 5.

Tabela 5: Bijeção hipotética entre $\mathbb{N}$ e S

S	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_1$	$\mathbb{R}_2$	$\mathbb{R}_3$	...
$\mathbb{N}$	0	1	2	3	...

Exemplo

Suponha-se, sem perda de generalidade, que todos os elementos de S sejam denotados através de representações com um número infinito de casas de decimais significativas. Assim, por exemplo, em vez de escrever $0,1$, adota-se a representação equivalente:

$$0,0999999999999999999999...$$

Se cada elemento $\mathbb{R}_i \in S$ pode ser escrito como sendo uma seqüência infinita do tipo:

$$0, d_{i_0} d_{i_1} d_{i_2} d_{i_3} ... d_{i_n} ...$$

então a construção do novo elemento $0, x_0 x_1 x_2 x_3 ... x_n ..., x_j \neq d_{j_j}, x_j \neq 0$ é suficiente para provar que o mesmo não pertence à seqüência originalmente proposta, uma vez que esse novo elemento difere em pelo menos uma casa decimal de cada um dos elementos inicialmente considerados, sendo, portanto, diferente de todos eles. Logo, S não é enumerável e, conseqüentemente, $\mathbb{R}$ também não.

Exemplo

Sejam:

$\mathbb{R}_0 = 0, \underbrace{d_{0_0}} d_{0_1} d_{0_2} d_{0_3} ... d_{0_n} \ldots$

$\mathbb{R}_1 = 0, d_{1_0} \underbrace{d_{1_1}} d_{1_2} d_{1_3} ... d_{1_n} \ldots$

$\mathbb{R}_2 = 0, d_{2_0} d_{2_1} \underbrace{d_{2_2}} d_{2_3} ... d_{2_n} \ldots$

$\mathbb{R}_3 = 0, d_{3_0} d_{3_1} d_{3_2} \underbrace{d_{3_3}} ... d_{3_n} \ldots$

...

Então escolhe-se: 0 , x_0 x_1 x_2 x_3 ... x_n ...

com:

$x_0 \neq d_{0_0}$

$x_1 \neq d_{1_1}$

$x_2 \neq d_{2_2}$

$x_3 \neq d_{3_3}$

...

Cardinalidade relativa de conjuntos infinitos

Como está mostrado no Exemplo 4.8, nem todos os conjuntos infinitos possuem a mesma cardinalidade. Assim, apesar de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ possuírem uma quantidade infinita de elementos, é intuitivo que $\mathbb{R}$ possui uma quantidade muito maior de elementos que $\mathbb{N}$, ou seja, $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$, impedindo que seja estabelecida uma função bijetora entre ambos.

Números transfinitos

Esses são alguns dos resultados da Teoria dos Números Transfinitos, desenvolvida no final do século XIX pelo matemático russo Georg Cantor (1845-1918), de acordo com a qual os **números transfinitos** representam quantidades não-finitas ordenadas de forma crescente. Tais quantidades são representadas por $\aleph_0, \aleph_1, ..., \aleph_n, ...$, de tal forma que $\aleph_{i-1} < \aleph_i < \aleph_{i+1}$, para $i \geqslant 1$. Além disso, $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$.
Outros exemplos de conjuntos infinitos enumeráveis são o conjunto dos números racionais e o conjunto de todas as cadeias que podem ser formadas pela concatenação de símbolos de um conjunto finito Σ. Já o conjunto formado por todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$, ou seja, o conjunto $2^{\mathbb{N}}$, é não-enumerável.

Definição de conjunto infinito

Formalmente, um conjunto X é dito **infinito** se for possível identificar um subconjunto próprio de X, por exemplo, Y, tal que $|X| = |Y|$.

Exemplo 4.9

No Exemplo 4.8, o fato de que $S \subset \mathbb{R}$ e $|S| = |\mathbb{R}|$ é suficiente para garantir que $\mathbb{R}$ é um conjunto infinito.

Exemplo 4.10

Considere-se o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Deseja-se demonstrar que $\mathbb{N}$ é infinito com o auxílio do subconjunto próprio $\mathbb{N} - \{0\}$. Não é difícil perceber que esses dois conjuntos possuem a mesma cardinalidade, uma vez que a função $n+1, n \in \mathbb{N}$ mapeia univocamente cada elemento de $\mathbb{N}$ em elementos do subconjunto próprio $\mathbb{N} - \{0\} : 0 \to 1, 1 \to 2, 2 \to 3, 3 \to 4, 4 \to 5, 5 \to 6, 6 \to 7 \ldots$
Assim, apesar de $\mathbb{N} - \{0\}$ possuir um elemento a menos que $\mathbb{N}$, na verdade ambos possuem a mesma cardinalidade, o que confirma $\mathbb{N}$ como conjunto infinito.

Teorema

Teorema 4.1 "Seja A um conjunto qualquer. Então $|2^A| > |A|$."

Constata-se com facilidade a existência de pelo menos uma função f, que associa cada elemento $x \in A$ com um elemento $f(x) \in 2^A$, e que seja injetora e total. Logo, é possível concluir que $|A| \leqslant |2^A|$. Para provar que $|A| < |2^A|$, é suficiente mostrar que não existe função bijetora de A para 2^A.
Suponha-se que exista tal bijeção. Nesse caso, pode-se afirmar que todo e qualquer elemento $x \in A$ está associado a um elemento distinto $f(x) \in 2^A$. Considere-se agora o seguinte subconjunto de A:

$$S = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$$

Teorema

De acordo com a hipótese formulada (de que existe uma bijeção entre os conjuntos), é esperado que $S = f(x_i)$ para algum $x_i \in A$. Tal conclusão, se verdadeira, acarretaria as seguintes conseqüências, de forma exclusiva:

- Se $x_i \in S$, e como $S = f(x_i)$, por hipótese, então $x_i \notin S$, o que constitui uma contradição;
- Se $x_i \notin S$, e como $S = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$, por definição, então $x_i \in S$, o que também é uma contradição.

Qualquer que seja o caso, resulta uma contradição. Logo, a hipótese inicialmente formulada é falsa e disso conclui-se não existir qualquer bijeção entre A e 2^A. Portanto, $|A| < |2^A|$.

Teorema

O Teorema 4.1 demonstra que conjuntos infinitos de cardinalidades sucessivamente maiores podem ser obtidos pela aplicação sucessiva da operação conjunto-potência. Considere os conjuntos $A, B = 2^A, C = 2^B, D = 2^C$ etc. Então, $|A| < |B| < |C| < |D| < \ldots$

De acordo com a teoria de Cantor, $\mathbb{N}$ é o conjunto que possui a menor cardinalidade entre todos os conjuntos infinitos, a qual é denotada por $\aleph_0$, o primeiro número da sua série transfinita. Por conseqüência, $|\mathbb{N}| < |2^{\mathbb{N}}|$. Por outro lado, conforme foi visto anteriormente, $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$, o que sugere a questão: "será que $|\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}|$?". De fato, este resultado pode ser provado como sendo verdadeiro.

Hipótese do Contínuo

Por outro lado, não se sabe da existência de algum conjunto X tal que $\aleph_0 < |X| < |\mathbb{R}|$ (ou, o que é equivalente, $\aleph_0 < |X| < |2^{\mathbb{N}}|$). Ou seja, não se sabe se existe algum conjunto infinito com cardinalidade maior que a do conjunto dos números naturais e menor que o conjunto dos números reais. A **Hipótese do Contínuo** considera que não existe e, portanto, que $|\mathbb{R}| = \aleph_1$ (logo $|2^{\mathbb{N}}| = \aleph_1$).

Teorema

Teorema 4.2 "Sejam A e B dois conjuntos, $B \subseteq A$. Se $|A| = \aleph_0$, então $|B| \leqslant \aleph_0$."

Se $|A| = \aleph_0$, então existe uma função bijetora entre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ e o conjunto A (e vice-versa). Logo, existe uma função injetora e total f_1 que associa elementos de A e $\mathbb{N}$, conforme a Tabela 6.

Tabela 6: Função f_1 para o Teorema 4.2

A:	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_n	$\cdots$
f_1 :	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$	
$\mathbb{N}$:	0	1	2	$\cdots$	n	$\cdots$

Teorema

Se B é subconjunto de A, é possível associar cada elemento de B ao mesmo elemento de A através de uma função injetora e total f_2, conforme a Tabela 7.

Tabela 7: Função f_2 para o Teorema 4.2

$$
\begin{array}{rcccccc}
B: & - & a_1 & - & \cdots & a_n & \cdots \\
f_2: & & \downarrow & & & \downarrow & \\
A: & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & \cdots
\end{array}
$$

A composição das funções f_1 e f_2, ilustrada na Tabela 8, mostra que existe uma função injetora e total de B para $\mathbb{N}$.

Teorema

Tabela 8: Composição de f_1 com f_2 para o Teorema 4.2

$$
\begin{array}{rcccccc}
B\colon & - & a_1 & - & \ldots & a_n & \ldots \\
f_2: & & \downarrow & & & \downarrow & \\
A\colon & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n & \ldots \\
f_1: & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
\mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & \ldots & n & \ldots
\end{array}
$$

Logo, $|B| \leqslant |\mathbb{N}|$, ou seja, $|B| \leqslant \aleph_0$. Em outras palavras, qualquer subconjunto (finito ou infinito) de um conjunto enumerável é também um conjunto enumerável.

Teorema

Teorema 4.3 "Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Se $|A| = \aleph_0$ e $|B| = \aleph_0$, então $|A \cup B| = \aleph_0$."

Se A e B são conjuntos enumeráveis (finitos ou infinitos), então seus elementos podem ser ordenados da seguinte forma:

$$
\begin{array}{ll}
A: & a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, ... a_{n-1}, a_n, a_{n+1} ... \\
B: & b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, ... b_{n-1}, b_n, b_{n+1} ...
\end{array}
$$

Teorema

A enumeração dos elementos de $A \cup B$ pode ser feita através do seguinte procedimento:

$$A \cup B : a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ...a_{n-1}, b_{n-1}, a_n, b_n, a_{n+1}, b_{n+1}, ...$$

Portanto, $A \cup B$ é enumerável e $|A \cup B| = \aleph_0$. Em outras palavras, a união de dois conjuntos enumeráveis é sempre um conjunto enumerável.

Teorema

Teorema 4.4 “Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Se $|A| = \aleph_0$ e $|B| = \aleph_0$, então $|A \cap B| \leqslant \aleph_0$.”

Se $A \subseteq B$, então $A \cap B = A$ e $|A \cap B| = |A| = \aleph_0$ por hipótese. Se, por outro lado, $B \subseteq A$, então $A \cap B = B$ e $|A \cap B| = |B| = \aleph_0$ por hipótese. Finalmente, se nenhuma dessas duas condições for verdadeira, então $(A \cap B) \subseteq A$ e, pelo Teorema 4.2, $|A \cap B| \leqslant \aleph_0$. Portanto, em qualquer caso que se considere, $|A \cap B| \leqslant \aleph_0$.

Teorema

Teorema 4.5 "Sejam A e B dois conjuntos, $B \subseteq A$. Se $|A| = \aleph_1$ e $|B| = \aleph_0$, então $|A - B| = \aleph_1$."

Suponha que $|A - B| = \aleph_0$. Então, de acordo com o Teorema 4.3, $|(A - B) \cup B| = \aleph_0$. No entanto, $(A - B) \cup B = A$ e, pela hipótese, $|A| = \aleph_1$. Portanto, $|A - B| \neq \aleph_0$. Por outro lado, como $A - B \subseteq A$, segue que $|A - B| \leqslant |A|$, ou seja, $|A - B| \leqslant \aleph_1$. Como $|A - B| \neq \aleph_0$, conclui-se que $|A - B| = \aleph_1$.