LINGUAGENS FORMAIS E AUTÔMATOS

Prova 1 – 23/05/2019 – Prof. Marcus Ramos

1ª Questão (2 pontos): Considere os conjuntos $P = \{a, b\}$ e $Q = \{0,1\}$. Determine a cardinalidade de cada um dos seguintes conjuntos e apresente dois exemplos de elementos de cada:

- $P \times Q$

  $2 * 2 = 4,$
  $(a, 0)$
  $(a, 1)$

- $2^P \times 2^Q$

  $2^2 * 2^2 = 16$
  $(\emptyset, \emptyset)$
  $(\{a, b\}, \{0,1\})$

- $2^{P \times Q}$

  $2^{2*2} = 16$
  $\emptyset$
  $\{(a, 0), (a, 1)\}$

- $P \times 2^{P \times Q} \times 2^Q$

  $2 * 2^{2*2} * 2^2 = 128$
  $(a, \emptyset, \emptyset)$
  $(b, \{(a, 0), (a, 1)\}, \{0,1\})$

2ª Questão (1,5 ponto): Prove que o conjunto dos números reais não-inteiros é não-enumerável. Fique à vontade para utilizar resultados anteriores vistos em sala de aula.

Conforme visto em sala de aula, o conjunto dos números reais é não-enumerável e tem cardinalidade $\aleph_1$. Por outro lado, o conjunto dos números inteiros é enumerável e tem cardinalidade $\aleph_0$. Além disso, vimos um teorema que diz que a $\aleph_1 - \aleph_0 = \aleph_1$. Logo, segue que a cardinalidade do conjunto dos números reais não-inteiros é $\aleph_1$ (não-enumerável).

3ª Questão (1,5 ponto): Considere a gramática apresentada a seguir e responda às perguntas:

$G = (\{a, b, S, X, Y\}, \{a, b\}, P, S)$, onde $P =$

$\{$
$S \to XY,$
$X \to aXb,$
$X \to \varepsilon,$
$Y \to aYbb,$
$Y \to \varepsilon$
$\}$

- Esta gramática está bem formada? Justifique a sua resposta;

  Sim, pelos seguintes motivos:
  ✓ Todos os elementos da quádrupla foram especificados;
  ✓ Σ e N $(V - \Sigma)$ são finitos e não-vazios;
  ✓ $\Sigma \subseteq \mathrm{V}$;
  ✓ $S \in N$;
  ✓ Todos os não-terminais possuem regras;
  ✓ Todas as regras obedecem ao formato $\alpha \rightarrow \beta$, onde $\alpha \in V^*NV^*$ e $\beta \in V^*$.

- Escolha uma sentença de comprimento 5 e mostre a seqüência de derivações que gera a mesma;

  $S \Rightarrow XY \Rightarrow aXbY \Rightarrow abY \Rightarrow abaYbb \Rightarrow ababb$

- Qual é a linguagem gerada por esta gramática?

  Esta gramática gera a linguagem das cadeias w construídas sobre o alfabeto $\{a, b\}$ de tal forma que:

  ✓ $\mathrm{w} = \mathrm{w}_1\mathrm{w}_2\mathrm{w}_3\mathrm{w}_4$;
  ✓ w_1 e w_3 contêm apenas símbolos a (zero ou mais);
  ✓ w_2 e w_4 contêm apenas símbolos b (zero ou mais);
  ✓ $|\mathrm{w}_2| = |\mathrm{w}_1|$;
  ✓ $|\mathrm{w}_4| = 2 * |\mathrm{w}_3|$;
  ✓ São exemplos de sentenças ε, ab, abb, ababb, aabbaaabbbbbb entre outras.

4ª Questão (2 pontos): A gramática G_1 abaixo gera a linguagem $a^n b^n c^n$ com $n \geq 1$. Obtenha, a partir de G_1, uma gramática G_2 que gere a linguagem $a^n b^n c^n d^n$ com $n \geq 1$.

$S \rightarrow aSBC$
$S \rightarrow abC$
$CB \rightarrow BC$
$bB \rightarrow bb$
$bC \rightarrow bc$
$cC \rightarrow cc$

Basta acrescentar um novo símbolo não-terminal D, modificar duas regras (*) e acrescentar quatro novas regras (**) mantendo a mesma lógica da gramática original. Assim, G_2 torna-se:

$S \rightarrow aSBCD$ (*)
$S \rightarrow abCD$ (*)
$DB \rightarrow BD$ (**)
$DC \rightarrow CD$ (**)
$CB \rightarrow BC$
$bB \rightarrow bb$
$bC \rightarrow bc$
$cC \rightarrow cc$
$cD \rightarrow cd$ (**)
$dD \rightarrow dd$ (**)

5ª Questão (1,5 ponto): Obtenha gramáticas lineares à direita ou à esquerda (unitárias ou não-unitárias) que geram as seguintes linguagens sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$. Procure apresentar respostas cuja lógica possa ser facilmente inferida.

- Cadeias que começam com a ou possuem comprimento par;

$S \rightarrow aX$
$X \rightarrow aX$
$X \rightarrow bX$
$X \rightarrow \varepsilon$
$S \rightarrow aY$
$S \rightarrow bY$
$Y \rightarrow aS$
$Y \rightarrow bS$
$S \rightarrow \varepsilon$

- Cadeias que terminam com o símbolo c e contêm a subcadeia bbb;

$S \rightarrow aS$
$S \rightarrow cS$
$S \rightarrow bX$
$X \rightarrow bY$
$X \rightarrow aS$
$X \rightarrow cS$
$Y \rightarrow bZ$
$Y \rightarrow aS$
$Y \rightarrow cS$
$Z \rightarrow aZ$
$Z \rightarrow bZ$
$Z \rightarrow cZ$
$Z \rightarrow c$

- Cadeias que possuem comprimento múltiplo de 3, mas diferente de 3.

$S \rightarrow \varepsilon$
$S \rightarrow aU$
$S \rightarrow bU$
$S \rightarrow cU$
$U \rightarrow aD$
$U \rightarrow bD$
$U \rightarrow cD$
$D \rightarrow aT$
$D \rightarrow bT$
$D \rightarrow cT$
$T \rightarrow aQ$
$T \rightarrow bQ$
$T \rightarrow cQ$
$Q \rightarrow aC$
$Q \rightarrow bC$
$Q \rightarrow cC$
$C \rightarrow a$
$C \rightarrow b$
$C \rightarrow c$

$C \to aT$
$C \to bT$
$C \to cT$

6ª Questão (1,5 ponto): Obtenha conjuntos ou expressões regulares para as linguagens da questão anterior.

- Cadeias que começam com a ou possuem comprimento par;
  $a(a|b)^* \mid \big((a|b)(a|b)\big)^*$

- Cadeias que terminam com o símbolo c e contêm a subcadeia bbb;
  $(a|b|c)^*bbb(a|b|c)^*c$

- Cadeias que possuem comprimento múltiplo de 3, mas diferente de 3.
  $\varepsilon \mid (a|b|c)(a|b|c)(a|b|c)(a|b|c)(a|b|c)(a|b|c)((a|b|c)(a|b|c)(a|b|c))^*$