LINGUAGENS FORMAIS E AUTÔMATOS

Prova 3 – 16/04/2018 – Prof. Marcus Ramos

1ª Questão (1,0 ponto): Considere L a linguagem definida sobre o alfabeto $\{a, b, c, d\}$ de tal forma que suas sentenças não contém nenhuma das subcadeias aaa, bbb, ccc e ddd. L é regular? Prove a sua resposta.

Sim, usando o fato de que a classe das linguagens regulares é fechada em relação às operações de complementação e intersecção:

- $L_1 = (a|b|c|d)^*aaa(a|b|c|d)^*$ (contém a subcadeia aaa);
- $L_2 = (a|b|c|d)^*bbb(a|b|c|d)^*$ (contém a subcadeia bbb);
- $L_3 = (a|b|c|d)^*ccc(a|b|c|d)^*$ (contém a subcadeia ccc);
- $L_4 = (a|b|c|d)^*ddd(a|b|c|d)^*$ (contém a subcadeia ddd);
- $L = \overline{L_1} \cap \overline{L_2} \cap \overline{L_3} \cap \overline{L_4}$

2ª Questão (1,5 ponto): Prove que o pertencimento de uma cadeia a uma linguagem regular é uma questão decidível.

Se a linguagem é regular, então existe um autômato finito M que aceita a mesma. A partir de M, pode-se obter um autômato equivalente M', isento de transições em vazio, que não entra em loop e portanto sempre pára. Agora, basta simular M' com a cadeia fornecida e verificar se a mesma é aceita ou não. Isto prova que a questão é decidível.

3ª Questão (1,5 ponto): Obtenha uma gramática isenta de regras vazias e de regras unitárias que seja equivalente à gramática abaixo:

$S \rightarrow aaXbbY \mid Z \mid W$
$X \rightarrow aX \mid \varepsilon$
$Y \rightarrow bY \mid \varepsilon$
$Z \rightarrow X \mid a$
$W \rightarrow Y \mid b$

Regras vazias:

$S' \rightarrow S \mid \varepsilon$
$S \rightarrow aaXbbY \mid aabbY \mid aaXbb \mid aabb \mid Z \mid W$
$X \rightarrow aX \mid a$
$Y \rightarrow bY \mid b$
$Z \rightarrow X \mid a$
$W \rightarrow Y \mid b$

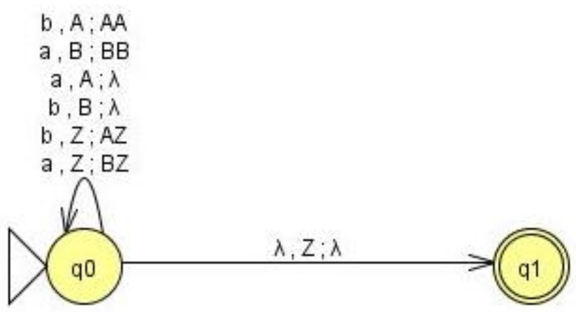
Regras unitárias:

$S' \rightarrow aaXbbY \mid aabbY \mid aaXbb \mid aabb \mid a \mid aX \mid b \mid bY \mid \varepsilon$
$S \rightarrow aaXbbY \mid aabbY \mid aaXbb \mid a \mid aX \mid b \mid bY$
$X \rightarrow aX \mid a$
$Y \rightarrow bY \mid b$

$Z \rightarrow aX \mid a$
$W \rightarrow bY \mid b$

(S, Z e W são inacessíveis e podem ser eliminados posteriormente).

4ª Questão (1,5 ponto): Obtenha um autômato de pilha que aceite a linguagem sobre o alfabeto $\{a, b\}$ onde as sentenças possuem sempre a mesma quantidade de símbolos a e de símbolos b (a ordem não importa).



5ª Questão (1,5 ponto): A classe das linguagens livres de contexto não é fechada em relação à operação de intersecção. Como, então, você justifica o fato de que a intersecção das linguagens $a^i b^i c^* d^*$, com $i \geq 0$ e $a^* b^* c^j d^j$, com $j \geq 0$, produz uma linguagem livre de contexto?

Uma coisa não tem nada a ver com a outra. Uma classe de linguagens é dita fechada em relação à uma certa operação quando a aplicação da operação à qualquer (ou quaisquer) linguagem (ou linguagens) da classe produz sempre uma linguagem que pertence à mesma classe. Isto, no entanto, não significa que não possam existir exceções, como é o das linguagens do enunciado.

6ª Questão (1,5 ponto): A linguagem $L = a^p b^p a^q b^q$, com $p \geq 0, q \geq 0$, é livre de contexto? Prove a sua resposta.

Sim, isto pode ser provado, por exemplo, pela seguinte gramática livre de contexto:

$S \rightarrow XX$
$X \rightarrow aXb \mid \varepsilon$

7ª Questão (1,5 ponto): A linguagem $L = a^p b^q a^p b^q$, com $p \geq 0, q \geq 0$, é livre de contexto? Prove a sua resposta.

Não, pela aplicação do Pumping Lemma para as linguagens livres de contexto. Suponha que L seja livre de contexto, n a constante definida pelo PL e considere a cadeia $\gamma = a^n b^n a^n b^n$. Então, $|\gamma| = 4 * n$ e portanto $|\gamma| \geq n$. Além disso, $\gamma \in L$. Considere $\gamma = a^n b^n a^n b^n = uvwxy$. Então, existem as seguintes possibilidades para a cadeia vwx (lembrando que, pelo PL, $|vwx| \leq n$):

1. Contém apenas símbolos a;
2. Contém apenas símbolos b;
3. Contém um ou mais símbolos a seguidos de um ou mais símbolos b;
4. Contém um ou mais símbolos b seguidos de um ou mais símbolos a.

Considere agora as cadeias vx (lembrando que $|vx| \geq 1$), uv^0wx^0y e os casos acima. Então:

1. vx contém apenas símbolos a (pelo menos um) e a cadeia uv^0wx^0y não pode pertencer à L, pois há um desbalanceamento entre as quantidades de a de ambos os lados;
2. Similar ao caso acima;
3. vx contém apenas símbolos a e/ou símbolos b (pelo menos um). Se contiver apenas símbolos a, há um desbalanceamento com a quantidade correspondente de a. Idem ser houver apenas símbolos b. Finalmente, se contiver símbolos a e b simultaneamente, haverá um desbalanceamento duplo.
4. Similar ao caso acima.

Em qualquer caso, são geradas cadeias que não pertencem à L. Logo, a hipótese é falsa e L não é livre de contexto.