LINGUAGENS FORMAIS E AUTÔMATOS

Prova 4 – 09/08/2016 – Prof. Marcus Ramos

1. (2,0 pontos) A gramática abaixo gera a linguagem $a^m b^n$ com m ≥ 1, n ≥ 1 e m ≠ n. Considere a sentença w = aabbbb e prove (através de caminhos em árvores de derivação) que existem subcadeias u, v, x, y e z tais que w = uvxyz, de tal modo que u, v, x, y e z satisfazem os critérios do Pumping Lemma para as Linguagens Livres de Contexto (neste caso, mesmo com $|w| < 2^k$).

   $S \rightarrow A'S_1 \mid A'A \mid a \mid B'B \mid b$
   $S_1 \rightarrow SB'$
   $A \rightarrow A'A \mid a$
   $B \rightarrow B'B \mid b$
   $A' \rightarrow a$
   $B' \rightarrow b$

   Existem dois caminhos de comprimento máximo na árvore de derivação da sentença aabbbb nesta gramática: $SS_1SS_1SB'b$ e SS_1SS_1SBb. Em ambos, existem 3 ocorrências no símbolo não-terminal S e duas de S_1. Se considerarmos, por exemplo, o primeiro caminho e as duas últimas ocorrências de S, temos que u=a, v=a, x=bb, y=b e z=b. A aplicação das regras da segunda ocorrência na primeira gera a sentença abbb, ou uv^0xy^0z. A aplicação recorrente das regras da primeira ocorrência na segunda gera as sentenças $a(a)^i bb(b)^i b$, com i ≥ 1. Note-se ainda que $|vxy| = 4 \leq 2^4$ e também que $|vy| = 2 \geq 1$.

2. (2,0 pontos) Sabe-se que a intersecção de uma linguagem livre de contexto com uma linguagem regular resulta sempre numa linguagem livre de contexto. Em outras palavras, a classe das linguagens livres de contexto é fechada em relação à operação de intersecção com linguagens regulares. Use este resultado, e também a linguagem definida pela expressão regular R = a*b*c*, para provar que a linguagem $L = \{w \in a,b,c\}^* \mid |w|_a=|w|_b+1=|w|_c+2\}$ não é livre de contexto.

   Deve-se primeiro observar que $L \cap R = \{ a^{i+2}b^{i+1}c^i \mid i \geq 0\}$. Esta linguagem, no entanto, não é livre de contexto (prova abaixo). Consequentemente, L não pode ser livre de contexto pois isto violaria o fechamento das linguagens livres de contexto em relação à intersecção com linguagens regulares.

   Para provar que $L \cap R$ não é livre de contexto, basta escolher a sentença $w = a^{n+2}b^{n+1}c^n$. $|w| = 3n+3 \geq n$. Logo, w = uvxyz tal que todas as cadeias uv^ixy^iz, com i ≥ 0, pertencem à linguagem, $|vxy| \leq n$ e $|vy| \geq 1$. Portanto, uma das cinco opções é válida para vxy: (i) contém apenas as; (ii) contém apenas bs; (iii) contém apenas cs; (iv) contém apenas as seguidos de bs; (v) contém apenas bs seguidos de cs. Em todos estes casos, o bombeamento de v e y produz cadeias que não pertencem à linguagem. Logo, a linguagem não é livre de contexto.

3. (2,0 pontos) Uma gramática livre de contexto controlada por uma linguagem regular é composta por uma gramática livre de contexto com regras nomeadas e uma expressão regular sobre o alfabeto dos nomes usados. A ideia é que, ao contrário de uma gramática convencional, as regras só podem ser usadas na ordem definida por alguma sentença da linguagem gerada pela expressão regular. Todas as demais são inválidas. Exemplo: a gramática controlada abaixo define a linguagem sensível ao contexto $\{a^nb^nc^n \mid n \geq 1\}$.

   $(p_1)\ S \rightarrow BC$
   $(p_2)\ B \rightarrow aBb$
   $(p_3)\ B \rightarrow ab$
   $(p_4)\ C \rightarrow cC$
   $(p_5)\ C \rightarrow c$

   $R = p_1(p_2p_4)^*p_3p_5$

Considere a sentença $p_1p_2p_4p_2p_4p_3p_5 \in R$. Então, aaabbbccc é uma sentença da linguagem definida por esta gramática controlada.

Obtenha uma gramática controlada que gere a linguagem $\{a^nb^nc^{n+1}d^{n+2} \mid n \geq 0\}$.

(p_1) $S \rightarrow ABCD$
(p_2) $A \rightarrow aA$
(p_3) $A \rightarrow \varepsilon$
(p_4) $B \rightarrow bB$
(p_5) $B \rightarrow \varepsilon$
(p_6) $C \rightarrow cC$
(p_7) $C \rightarrow c$
(p_8) $D \rightarrow dD$
(p_9) $D \rightarrow dd$

$R = p_1(p_2p_4p_6p_8)^*p_3p_5p_7p_9$

4. (1,0 ponto) Explique a relação que existe entre a classe das linguagens livres de contexto determinísticas e a classe das linguagens livres de contexto não-determinísticas. Discorra sobre as conseqüências práticas desta relação.

A classe das linguagens livres de contexto não-determinísticas é um subcojunto próprio da classe das linguagens livres de contexto gerais. A classe das linguagens livres de contexto determinísticas, por sua vez, é um subconjunto próprio da classe das linguagens livres de contexto não-determinísticas. A conseqüência é que existem linguagens livres de contexto que só podem ser reconhecidas por autômatos de pilha não-determinísticos, o que é indesejável do ponto de vista da implementação de analisadores sintáticos. O motivo é que o tempo de análise pode ser muito grande, especialmente nos casos em que a cadeia não pertence à linguagem. Por esta razão, devemos procurar sempre trabalhar apenas com linguagens livres de contexto determinísticas.

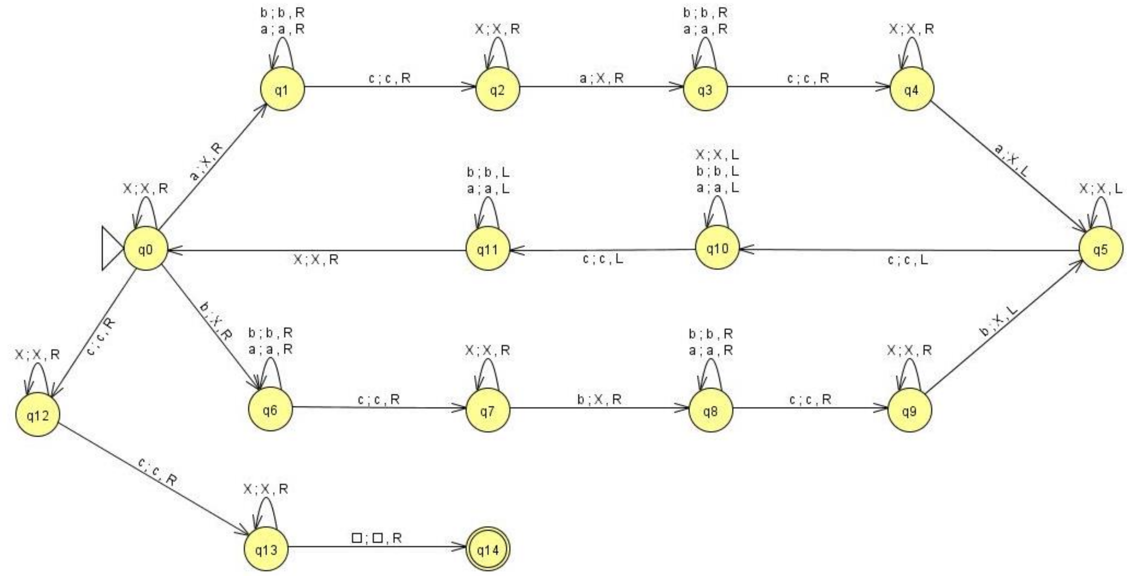
5. (1,0 ponto) Prove:
    a. Toda linguagem regular é também uma linguagem sensível ao contexto;

Linguagem regular é aquela que é gerada por uma gramática linear à direita ou à esquerda. Nos dois casos, a gramática é também uma gramática livre de contexto e portanto a linguagem é também livre de contexto. Por sua vez, toda linguagem livre de contexto (a menos da cadeia vazia) pode ser gerada por uma gramática isenta de regras vazias que, neste caso, é também uma gramática sensível ao contexto. Portanto, além de ser livre de contexto a linguagem é também sensível ao contexto.

    b. Nem toda linguagem sensível ao contexto é uma linguagem regular.

A linguagem a^nb^n, com $n \geq 1$, por exemplo, é sensível ao contexto. De fato, ela é gerada por uma gramática livre de contexto, que também é sensível ao contexto ($S \rightarrow aSb$, $S \rightarrow ab$). No entanto, conforme visto em sala de aula (através da aplicação do Pumping Lemma para as Linguagens Regulares), esta linguagem não é regular.

6. (2,0 pontos) Obtenha uma Máquina de Turing com Fita Limitada que reconheça a linguagem $\{wcwcw \mid w \in \{a,b\}^*\}$ sobre o alfabeto $\{a,b,c\}$.


q0
q1
q2
q3
q4
q5
q6
q7
q8
q9
q10
q11
q12
q13
q14
b ; b , R
a ; a , R
X ; X , R
c ; c , R
a ; X , R
a ; X , L
X ; X , L
b ; b , L
a ; a , L
c ; c , L
b ; X , R
b ; X , L
c ; c , R
□ ; □ , R