LINGUAGENS FORMAIS E AUTÔMATOS

Prova final - 05/07/2012 - Prof. Marcus Ramos

Questão 1 (1,2 ponto) - Considere o alfabeto $\{0,1\}$ e cadeias sobre esse alfabeto interpretadas como números binários em complemento de 2. Provar que os seguintes conjuntos de cadeias sobre esse alfabeto são regulares (a quantidade de zeros à esquerda é indiferente):

a) Números com cinco ou mais algarismos;

$(0|1)(0|1)(0|1)(0|1)(0|1)(0|1)^*$

b) Números positivos e ímpares;

$0(0|1)^*1$

c) Números negativos e pares;

$1(0|1)^*0$

d) Números menores ou iguais à 63_{10};

$0(0|1)(0|1)(0|1)(0|1)(0|1)(0|1)|1(0|1)^*$

e) Números maiores ou iguais à 8_{10};

$01(0|1)(0|1)(0|1)(0|1)^*$

f) Números diferentes de 3_{10}.

$0|01|010|01(0|1)(0|1)(0|1)^*|1(0|1)^*$

Questão 2 (2 pontos) - As linguagens abaixo são livres de contexto? Justifique as suas respostas.

a) (0,5 ponto) $a^i b^i c^j d^j$, com $i \geq 2, j \geq 3$.

Sim:
$S \to XY$
$X \to aXb|aabb$
$Y \to cYd|cccddd$

b) (1,5 ponto) $a^i b^j c^k$, com $j < i$ ou $k > 2 * i$ ou $j = i + k$;

Sim:
$S \to XN|Y|ZW$
$X \to aXb|M$
$M \to aM|a$
$N \to cN|\varepsilon$
$Y \to aYcc|PcN$
$P \to bP|\varepsilon$
$Z \to aZb|\varepsilon$
$W \to bWc|\varepsilon$

Questão 3 (2 pontos) - Provar que a linguagem $(ab)^i c(ba)^i, i \geq 0$, é:

a) (0,5 ponto) Livre de contexto;

$S \rightarrow abSba|c$

b) (1,5 ponto) Não-regular.

Considere a sentença $w = (ab)^n c(ba)^n$, onde n é a constante definida pelo Pumping Lemma para as linguagens regulares. Então, $|w| = 4n + 1 \geq n$, e existem x, y, z tais que $w = xyz, |xy| \leq n$ e $1 \leq |y| \leq n$, com $xy^i z \in L, i \geq 0$. Portanto, a subcadeia xy, e consequentemente a subcadeia y, são formadas pelo menos um símbolo (a ou b) e não contém o símbolo e c. Por outro lado, $xy^0 z$, obtida pelo bombeamento de y em xyz, conterá uma quantidade menor de símbolos à esquerda do símbolo c, ao passo que a quantidade de símbolos à direita do mesmo permanecerá inalterada. Logo, a cadeia resultante não pertence à linguagem (pois as quantidades de símbolos à esquerda e à direita do c central precisam ser idênticas, $2 * i$) e por isso a linguagem não pode ser regular.

Questão 4 (1 ponto) - Seja M um autômato finito com k estados que aceita a linguagem L. Provar que existe um autômato de pilha N com a mesma quantidade $k$de estados e que aceita a mesma linguagem L.

Basta construir um autômato de pilha com critério de aceitação estado final similar ao autômato finito original, substituindo cada transição do tipo $\delta(q_i, \sigma) = q_j$ deste último por $\delta(q_i, \sigma, Z_0) = (q_j, Z_0)$, supondo que Z_0 seja o símbolo inicial da pilha.

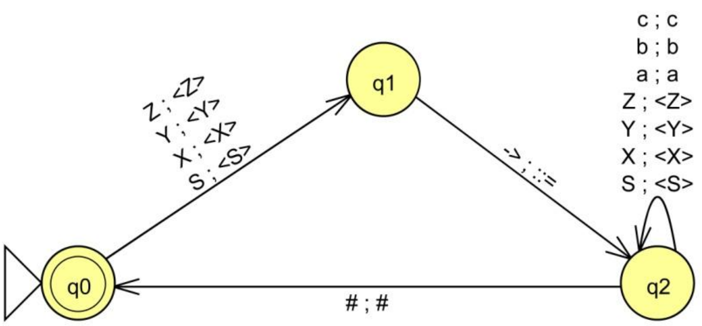
Questao 5 (1 ponto) - Construir um transdutor finito determinístico que aceite como entrada uma gramática livre de contexto qualquer sobre o alfabeto $\{S, X, Y, Z, a, b, c\}$, representada de forma algébrica, e gere na saída a mesma gramática representada em BNF.

As cadeias de entrada terão o formato:

$$\left((S|X|Y|Z) \rightarrow (S|X|Y|Z|a|b|c)^* \#\right)^*$$

As cadeias de saída terão o formato correspondente :

$$\left((<S>|<X>|<Y>|<Z>) ::= (<S>|<X>|<Y>|<Z>|a|b|c)^* \#\right)^*$$



Questão 6 (1 ponto) - Conceituar, exemplificar e discorrer sobre aplicações de:

a) (0,5 ponto) Propriedades de fechamento;

Diz-se que uma classe de linguagens é fechada em relação a uma operação se a aplicação da operação à quaisquer linguagens dessa classe resultar numa linguagem pertencente à essa mesma classe. Por exemplo, a classe das linguagens regulares é fechada em relação à operação de união. A principal aplicação reside na possibilidade de provar que uma certa linguagem pertence à uma determinada classe através da decomposição da mesma em linguagens mais simples, pertencentes à classe, e invocando as propriedades de fechamento relativas às operações necessárias para gerar a linguagem original.

b) (0,5 ponto) Questões decidíveis.

Um problema de decisão é um problema cujas respostas são sempre do tipo sim ou não. Uma questão decidível é um problema de decisão para o qual é possível sempre produzir uma resposta. Por exemplo, o problema de determinar se uma certa cadeia pertence à uma linguagem regular é decidível. Na prática, isso significa que questões decidíveis podem ser resolvidas através de algoritmos, como é o caso de programas de computador.

Questão 7 (1,8 ponto) - Um *"gramática livre de contexto controlada por uma expressão regular"* é definida como $G = (G', R)$, onde G' é uma gramática livre de contexto, R é uma expressão regular sobre o alfabeto $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ e p_i identifica a i-ésima produção de G', de tal forma que $L(G) = \{w \mid p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k} \in L(R) \text{ e } S \Rightarrow_{p_{i_1}} w_1 \Rightarrow_{p_{i_2}} w_2 \dots \Rightarrow_{p_{i_k}} w\}$.

Por exemplo, a gramática:

$(p_1)\ S \to BC$
$(p_2)\ B \to aBb$
$(p_3)\ B \to ab$
$(p_4)\ C \to cC$
$(p_5)\ C \to c$
$R = p_1(p_2p_4)^* p_3p_5$

Define a linguagem $a^n b^n c^n$, $n \geq 1$. A derivação de uma sentença dessa linguagem pode ser mostrada considerando-se a cadeia $p_1p_2p_4p_3p_5 \in L(R)$ e a seqüência de derivações correspondente, resultando em $aabbcc$. Pede-se: modificar a gramática G acima para gerar a linguagem $a^n b^n c^n d^n e^n$, $n \geq 0$.

$(p_1)\ S \to XYZ$
$(p_2)\ X \to aXb$
$(p_3)\ Y \to cYd$
$(p_4)\ Z \to eZ$
$(p_5)\ X \to \varepsilon$
$(p_6)\ Y \to \varepsilon$
$(p_7)\ Z \to \varepsilon$
$R = p_1(p_2p_3p_4)^* p_5p_6p_7$