LINGUAGENS FORMAIS E AUTÔMATOS

Prova 2 - 28 de junho de 2012 - Prof. Marcus Ramos

Questão 1 (2 pontos) - Obter uma gramática equivalente à gramática apresentada a seguir, porém isenta de regras vazias, produções unitárias, símbolos inúteis e símbolos inacessíveis:

$S \rightarrow aAbBcC$
$A \rightarrow aA \mid \varepsilon$
$B \rightarrow bB \mid A$
$C \rightarrow A \mid B \mid D$
$D \rightarrow aD \mid Db \mid cEc$
$E \rightarrow dEf \mid dfE \mid D$
$F \rightarrow Ea \mid bF \mid \varepsilon$

Símbolos inúteis:
{A,F}
{A,F,B,C}
{A,F,B,C,S}
{A,F,B,C,S}
D e E são símbolos inúteis.
$S \rightarrow aAbBcC$
$A \rightarrow aA \mid \varepsilon$
$B \rightarrow bB \mid A$
$C \rightarrow A \mid B$
$F \rightarrow bF \mid \varepsilon$

Símbolos inacessíveis:
{S}
{S,a,A,b,B,c,C}
{S,a,A,b,B,c,C}
F é um símbolo inacessível.
$S \rightarrow aAbBcC$
$A \rightarrow aA \mid \varepsilon$
$B \rightarrow bB \mid A$
$C \rightarrow A \mid B$

Regras vazias:
$S \rightarrow aAbBcB \mid abc \mid abBcC \mid aAbcC \mid aAbBc \mid abcC \mid aAbc \mid abBc$
$A \rightarrow aA \mid a$
$B \rightarrow bB \mid b \mid A$
$C \rightarrow A \mid B$

Regras unitárias:
$S \rightarrow aAbBcB \mid abc \mid abBcC \mid aAbcC \mid aAbBc \mid abcC \mid aAbc \mid abBc$
$A \rightarrow aA \mid a$
$B \rightarrow bB \mid b \mid aA \mid a$
$C \rightarrow aA \mid a \mid bB \mid$ b

Questão 2 (1 ponto) - A linguagem $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ não contém } "aabb" \text{ nem } "bbaa"\}$ é regular? Justifique a sua resposta.

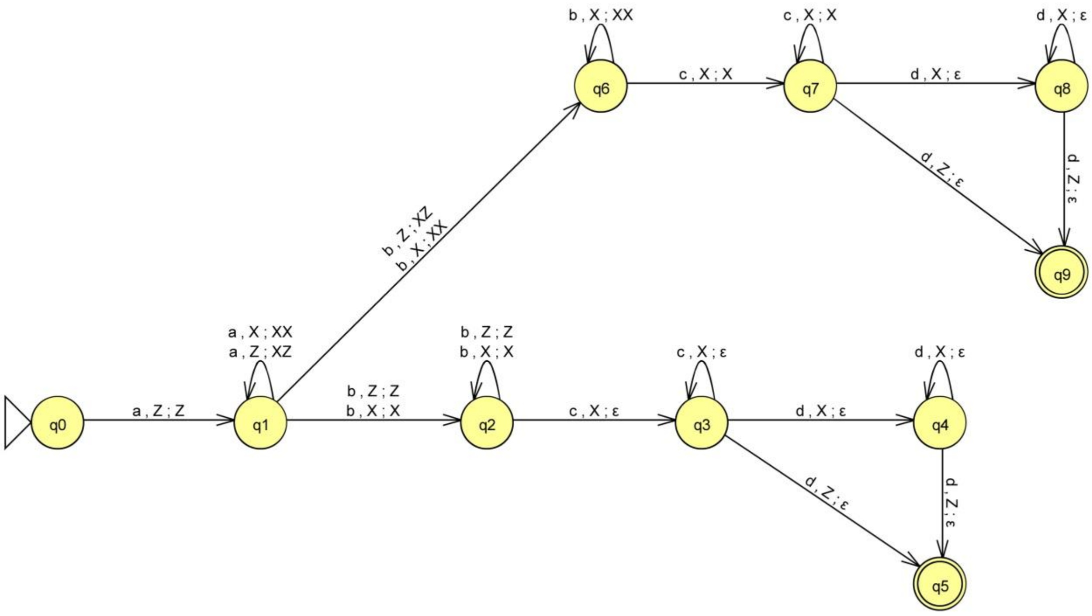
Sim. Basta considerar $L_1 = (a|b)^*aabb(a|b)^*$ e $L_2 = (a|b)^*bbaa(a|b)^*$. Como a classe as linguagens regulares é fechada em relação às operações de complementação e intersecção, segue que $L = \overline{L_1} \cap \overline{L_2}$ também é regular.

Questão 3 (1 ponto) - A linguagem $a^{i^3}b^{i^2}a^i, i > 0$, é regular? Justifique a sua resposta.

Não. Considere a sentença $w = a^{n^3}b^{n^2}a^n$, onde n é a constante definida pelo Pumping Lemma para as linguagens regulares. Então, $|w| = n^3 + n^2 + n \geq n$. Logo, $w = xyz$, com $|xy| \leq n$ e $1 \leq |y| \leq n$. Portanto, a subcadeia xy é formada apenas de símbolos a, e a subcadeia y também contém apenas símbolos a (pelo menos um). A cadeia xy^0z preserva as quantidades de b no meio e de a no final, porém contém uma quantidade menor de símbolos a no início. Essa cadeia não pode pertencer à linguagem e isso prova que a linguagem não é regular.

Questão 4 (2 pontos) - Considerar, em todos os casos a seguir, que $r > 0, s > 0, t > 0, u > 0$.
A linguagem $a^r b^s c^t d^u$, com (i) $r = t + u$, ou (ii) $u = r + s$, é livre de contexto? Justifique a sua resposta.

Sim, ela é aceita pelo autômato de pilha abaixo, com símbolo inicial da pilha Z e critério de aceitação estado final:



Questão 5 (2 pontos) - Prove:

a) (1 ponto) A linguagem $a^i b^j a^j b^i, i > 0, j > 0$, é livre de contexto;
b) (1 ponto) A linguagem $a^i b^j a^i b^j, i > 0, j > 0$, não é livre de contexto.

A linguagem $a^i b^j a^j b^i, i > 0, j > 0$ é gerada pela seguinte gramática livre de contexto:

$S \rightarrow aSb \mid aXb$

$X \rightarrow bXa \mid ba$

Considere a sentença $z = a^n b^n a^n b^n$, onde n é a constante definida pelo Pumping Lemma para as linguagens livres de contexto. Logo, $|z| = 4 * n \geq n$. Portanto, $z = uvwxy$, com $|vwx| \leq n$ e $1 \leq |vx| \leq n$. As seguintes hipóteses podem ser formuladas para a cadeia vwx:

i. Contém apenas símbolos a;
ii. Contém apenas símbolos b;
iii. Inicia com símbolos a (pelo menos um) e termina com símbolos b (pelo menos um);
iv. Inicia com símbolos b (pelo menos um) e termina com símbolos a (pelo menos um).

Qualquer que seja o caso considerado, a cadeia uwy não pode pertencer à linguagem: no caso (i) há um desbalanceamento na quantidade i de símbolos a, no caso (ii) há um desbalanceamento na quantidade j de símbolos b, e nos casos (iii) e (iv) há um desbalanceamento entre pelo menos uma das quantidades i e j.

Questão 6 (2 pontos) - Prove:

a) (0,5 ponto) Toda linguagem finita é livre de contexto;
b) (0,5 ponto) A classe das linguagens regulares é um subconjunto próprio da classe das linguagens livres de contexto;
c) (1 ponto) Toda linguagem livre de contexto é também uma linguagem sensível ao contexto.

a) Seja $L = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$. Então, $L = L(G)$ para G livre de contexto com o conjunto de regras $P = \{S \rightarrow w_1 | w_2 | \ldots | w_n\}$.
b) Pela definição, toda linguagem regular é gerada por uma gramática linear à direita. Pela definição, toda gramática linear à direita é também uma gramática livre de contexto. Pela definição, gramáticas livres de contexto geram linguagens livres de contexto. Além disso, existem linguagens livres de contexto que não são regulares. É o caso, por exemplo, da linguagem $a^i b^i$, que pode ser provada não-regular pela aplicação do Pumping Lemma para as linguagens regulares.
c) Suponha que L é livre de contexto e não contém a cadeia vazia. Então, $L = L(G)$, com G livre de contexto sem regras vazias. Como toda gramática nessas condições é também, pela definição, uma gramática sensível ao contexto, e como gramáticas sensíveis ao contexto geram linguagens sensíveis ao contexto, segue que L é também sensível ao contexto. Suponha agora que L é livre de contexto e contém a cadeia vazia. Então $L - \{\varepsilon\}$ pode ser gerada por uma gramática livre de contexto sem regras vazias que também é, por definição, uma gramática sensível ao contexto. Logo, L é também uma linguagem sensível ao contexto.