Parte 1

Os exercícios propostos a seguir são reproduções de trechos do livro *Matemática Aplicada*, de L.J. Goldstein, D.C. Lay e D.I. Schneider, décima edição, editora Bookman.

Exercício 1 (página 19)

Seja f a função cujo domínio é constituído por todos os números reais e que é definida pela fórmula

$$f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 3x + 7.$$

Encontre $f(2)$ e $f(-2)$.

Para encontrar $f(2)$ substituímos 2 em cada uma das ocorrências de x na fórmula para $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(2) &= 3(2)^3 - 4(2)^2 - 3(2) + 7 \\ &= 3(8) - 4(4) - 3(2) + 7 \\ &= 24 - 16 - 6 + 7 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Para encontrar $f(-2)$ substituímos -2 em cada uma das ocorrências de x na fórmula para $f(x)$. Os parênteses asseguram que -2 é substituído corretamente. Por exemplo, x^2 tem que ser substituído por $(-2)^2$, e não por -2^2.

$$\begin{aligned} f(-2) &= 3(-2)^3 - 4(-2)^2 - 3(-2) + 7 \\ &= 3(-8) - 4(4) - 3(-2) + 7 \\ &= -24 - 16 + 6 + 7 \\ &= -27 \end{aligned}$$

Exercício 2 (página 21)

Se $f(x) = (4 - x)/(x^2 + 3)$, qual é o valor de $f(a)$? E de $f(a + 1)$?

Aqui, a representa algum número. Para encontrar $f(a)$, substituímos x por a sempre que este aparecer na fórmula que define $f(x)$:

$$f(a) = \frac{4 - a}{a^2 + 3}.$$

Para obter $f(a + 1)$, substitua $a + 1$ em cada ocorrência de x na fórmula de $f(x)$:

$$f(a + 1) = \frac{4 - (a + 1)}{(a + 1)^2 + 3}.$$

A expressão para $f(a + 1)$ pode ser simplificada, utilizando o fato de que $(a + 1)^2 = (a + 1)(a + 1) = a^2 + 2a + 1$:

$$f(a + 1) = \frac{4 - (a + 1)}{(a + 1)^2 + 3} = \frac{4 - a - 1}{a^2 + 2a + 1 + 3} = \frac{3 - a}{a^2 + 2a + 4}$$

Exercício 3 (página 104)

Suponha que $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existem. Então, temos os seguintes resultados:

(I) Se k é uma constante, então $\lim_{x\to a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x\to a} f(x)$

(II) Se r é uma constante positiva, então $\lim_{x\to a} [f(x)]^r = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^r$

(III) $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

Exercício 4 (página 335)

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções e a, b e k constante quaisquer. Então:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx \tag{1}$$

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \tag{2}$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \tag{3}$$

Exercício 5 (página 410)

Se R uma região no plano xy limitada pelos graficos de $y = g(x)$, $y = h(x)$ e pelas retas verticais $x = a$, $x = b$. Então

$$\int\int_R f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Exercício 6 (página 459)

Regra do Ponto Médio:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x \\ &= [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]\, \Delta x. \end{aligned}$$

Exercício 7 (página 460)

Regra do Ponto Trapézio:

$$\int_a^b f(x)dx \approx [f(a_0) + 2f(a_1) + \cdots + 2f(a_{n-1}) + f(a_n)]\, \frac{\Delta x}{2}.$$

Exercício 8 (página 476)

Calcular a integral imprópria:

$$\int_7^\infty \frac{1}{(x-5)^2}dx.$$

Solução:

$$\int_7^b \frac{1}{(x-5)^2}dx = -\left.\frac{1}{x-5}\right|_7^b = -\frac{1}{b-5} - \left(-\frac{1}{7-5}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{b-5}.$$

Quando $b \to \infty$, a fração $1/(b-5)$ aproxima-se de zero, de forma que

$$\int_7^\infty \frac{1}{(x-5)^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_7^b \frac{1}{(x-5)^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{b-5}\right) = \frac{1}{2}.$$

Nem toda integral imprópria é convergente. Se o valor de $\int_a^b f(x)dx$ não tem um limite quando $b \to \infty$, não podemos associar nenhum valor numérico a $\int_a^\infty f(x)dx$, e dizemos que a integral imprópria $\int_a^\infty f(x)dx$ é *divergente.*

Parte 2

Os exercícios propostos a seguir são reproduções de trechos do livro *Álgebra Linear*, de S. Lang, terceira edição, editora Ciência Moderna.

Exercício 9 (página 52)

Seja $A = (a_{ij}), i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$ uma matriz $m\times n$. Seja $B = (b_{jk}), i = 1, \ldots, n$ e $k = 1, \ldots, s$ uma matriz $n \times s$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1s} \\ & \ldots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{ns} \end{pmatrix}$$

Definimos o produto $A \times B$ como sendo a matriz $m \times s$ cuja ik-coordenada é:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}.$$

Se $A_1, \ldots, A_m$ são vetores-linha da matriz A, e se $B^1, \ldots, B^s$ são os vetores-coluna da matriz B, então a ik-coordenada do produto AB é igual a $A_i \cdot B^k$. Portanto:

$$\begin{pmatrix} A_1 \cdot B^1 & \ldots & A_1 \cdot B^s \\ \vdots & & \vdots \\ A_m \cdot B^1 & \ldots & A_m \cdot B^s \end{pmatrix}$$

Multiplicação de matrzes é portanto uma generalização do produto escalar.

Exercício 10 (página 56)

Sejam A, B e C matrizs tais que A e B podem ser multiplicadas e B e C podem ser multiplicadas. Então A e BC podem ser multiplicadas, AB e C podem ser multiplicadas, e vale a seguinte identidade:

$$(AB)C = A(BC).$$

Sejam $A = (a_{ij})$ uma matriz $m \times n$ e $B = (b_{jk})$ uma matriz $n \times r$. Consideremos ainda $C = (c_{kl})$ uma matriz $r \times s$. O produto $A \times B$ é uma matriz $m \times r$, cuja ik-componente é dada pela soma:

$$a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}.$$

Abreviaremos esta soma usando a notação Σ e escrevendo:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}.$$

Por definição, a il-componente de $(AB)C$ é igual a:

$$\sum_{k=1}^{r}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right]c_{kl} = \sum_{k=1}^{r}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kl}\right].$$

A soma do membro direito também representa a soma de todos os termos:

$$\sum a_{ik}b_{jk}c_{kl},$$

onde j e k assumem todos os valores inteiros $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq k \leq r$, respectivamente.

Se tivéssemos começado com a jl-componente de BC e depois calculado a il-componente de $A(BC)$, teríamos encontrado a mesma soma; com isto, fica demonstrado o nosso teorema.

Exercício 11 (página 124)

Seja $L : K^n \to K^m$ uma aplicação linear. Então existe uma única matriz A tal que $L = L_A$.

De modo usual, sejam $E^1, \ldots, E^n$ os vetores-coluna unitários em K^n, e $e^1, \ldots, e^m$ os vetores-coluna unitários em K^m. Assim, podemos escrever um vetor arbitrário X em K^n como uma combinação linear:

$$X = x_1E^1 + \cdots + x_nE^n = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

onde x_j é a j-ésima coponente de X. Vimos $E^1, \ldots, E^n$ como vetores-coluna. Por linearidade, encontramos:

$$L(X) = x_1L(E^1) + \cdots + x_nL(E^n).$$

Além disso, podemos escrever cada $L(E^j)$ em termos de $e^1, \ldots, e^m$. Em outras palavras, existem números a_{ij} que:

$$\begin{array}{ccccc} L(E^1) & = & a_{11}e^1 & + \cdots + & a_{m1}e^m \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ L(E^n) & = & a_{1n}e^1 & + \cdots + & a_{mn}e^m \end{array}$$

ou em termos de vetores-coluna:

$$L(E^1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, L(E^n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} L(X) &= x_1(a_{11}e^1 + \cdots + a_{m1}e^m) + \cdots + x_n(a_{1n}e^1 + \cdots + a_{mn}e^m) \\ &= (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)e^1 + \cdots + (a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)e^m. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, se $A = a_{ij}$, então concluímos que:

$$L(X) = AX.$$

Ao escrever esta expressão por extenso, lê-se:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + & \cdots & +a_{1n}x_n \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + & \cdots & +a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Assim, $L = L(A)$ é o operador linear associado à matriz A. Também chamamos A de **matriz associada ao operador linear** L.

Exercício 12 (página 201)

Antes de enunciar as propriedades gerais de um determinante arbitrário, vamos considerar primeiro um caso particular.

Seja

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

uma matriz 2×2 num corpo K. Definimos seu **determinante** como sendo $ad - bc$. Assim o determinante é um elemento de K. Ele é denotado por :

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Por exemplo, o determinante da matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

é igual a $2 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 7$.